OPPGAVER: UKE 4

Logik

Oppgave 1. For hvert af de følgende udsagn, formuler dets negation. Afgør hvilket udsagn er sandt: det oprindelige eller dets negation.

(i) $\exists S \subset \mathbb{N}\ \forall x \in \mathbb{N} : x \in S$.
(ii) $\forall S \subset \mathbb{N}\ \exists x \in \mathbb{N} : x \in S$.

Oppgave 2. La $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ være en følge i $\mathbb{R}$. Betragt følgende udsagn:

$$\forall k \in \mathbb{N}\ \exists N \in \mathbb{N}\ \forall n \geq N : |x_n| \leq \frac{1}{k}.$$

(i) Formuler udsagnet i ord på norsk.
(ii) Formuler negationen af udsagnet med kvantorer.
(iii) Find et eksempel på en følge som opfylder udsagnet.
(iv) Find et eksempel på en følge som opfylder negationen til udsagnet.

Oppgave 3. Udfyld nedenstående sandhedstabel:

A	B	$A \Rightarrow B$	$\neg A$	$\neg B$	$\neg B \Rightarrow \neg A$
0	0				
0	1				
1	0				
1	1				

Konkluder at "$A \Rightarrow B$" og "$\neg B \Rightarrow \neg A$" er logisk ækvivalente udsagn.

Bevistyper

Oppgave 4. La $n, m \in \mathbb{Z}$. Vis, at hvis $n \cdot m$ er partall så er mindst ét av tallene n og m partall. Vis dette på 3 forskellige måder: direkte, ved kontraposition og ved modstrid.

Oppgave 5. Lad $n \in \mathbb{N}^*$. Vis at følgende udsagn er ækvivalente:

(i) n er et primtal.
(ii) $(n-1)! \equiv -1 \mod n$
(iii) n ikke er en faktor i $(n-1)!$

Vær bevidst om hvilken bevisetype du anvender og overvej ved hver implikation om du kan finde mere end ét bevis.

Lidt mere talteori

Oppgave 6. Husk at et kvadrattal er et tal på formen k^2, for $k \in \mathbb{N}^*$.

(i) For $k \in \mathbb{N}^*$, vis at k^2 enten er kongruent til 0 eller 1 mod 4.
(ii) Vis at summen af 4 på hinanden følgende kvadrattal ikke er et kvadrattal.

Oppgave 7. La $n \in \mathbb{N}^*$ og antag at $a, b \in \mathbb{N}^*$ er faktorer av n. Under hvilke antagelser om a og b gælder ab er en faktor av n? Formuler og bevis dit udsagn. Såfremt det ikke altid er tilfældet må du desuden give et moteksempel.

Pytagoreiske tripler

Et trippel av naturlige tall $(x, y, z) \in \mathbb{N}^3$ kaldes et *Pytagoreisk trippel* dersom det opfylder $x^2 + y^2 = z^2$. Vi siger att et Pytagoreisk trippel er *primitivt* hvis den største fælles faktor av x, y og z er 1. Bemærk, at hvis $(x, y, z) \in \mathbb{N}^3$ er et Pytagoreisk trippel og $d \in \mathbb{N}^*$ er en fælles faktor av x, y og z sådan at $x = dx_0$, $y = dy_0$ og $z = dz_0$, så er også (x_0, y_0, z_0) et pytagoreisk trippel. For at forstå de Pytagoreiske triplene er det altså nok at forstå de primitive Pytagoreiske triplene.

Oppgave 8. I denne oppgave ska vi karakterisere de primitive Pytagoreiske triplene. Vi skal gøre dette ved først at vise at et trippel på en bestemt form er et primitivt Pytagoreisk trippel, og dernæst vise at alle primitive Pytagoreiske tripler er på netop denne form.

(i) La $p, q \in \mathbb{N}$ være indbyrdes primiske med $p > q$ og anta att de ikke begge er oddetall. Definer

$$\begin{aligned} x &= p^2 - q^2, \\ y &= 2pq, \\ z &= p^2 + q^2. \end{aligned}$$

Vis at (x, y, z) er et primitivt Pytagoreisk trippel.

Anta at (x, y, z) er et primitivt Pytagoreisk trippel der x er et oddetall, y er et partall og z er et oddetall. Ta $a, b \in \mathbb{N}$ sådan at $z + x = 2a$ og $z - x = 2b$.

(ii) Vis, at a og b er indbyrdes primiske.
(iii) Vis, at $y^2 = 4ab$.
(iv) Vis, at a og b begge er kvadrattall.

Vi kan nu ta $p, q \in \mathbb{N}$ sådan at $a = p^2$ og $b = q^2$.

(v) Vis, at p og q er indbyrdes primiske.
(vi) Vis, at p og q ikke begge er oddetall.
(vii) Sjekk at (x, y, z) er på formen som givet i del (i).