OPPGAVER: UKE 6

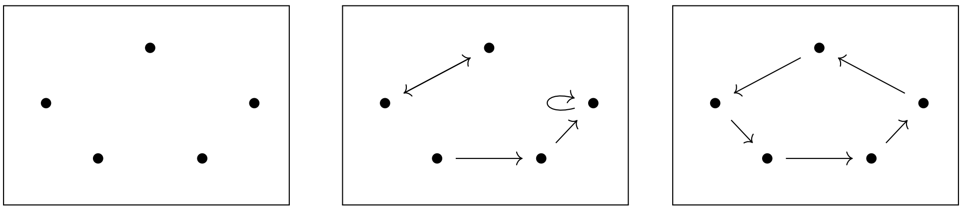
Egenskaber av relasjoner: refleksiv, symmetrisk og transitiv

La $\mathrm{R} \subseteq X \times X$ være en relasjon på mengden X.

- R er *refleksiv* hvis $x \,\mathrm{R}\, x$, for alle $x \in X$.
- R er *symmetrisk* hvis $x \,\mathrm{R}\, y$ medfører $y \,\mathrm{R}\, x$.
- R er *transitiv* hvis $x \,\mathrm{R}\, y$ og $y \,\mathrm{R}\, z$ medfører $x \,\mathrm{R}\, z$.

Afslutningen af relasjonen R med hensyn til en egenskab er den minste relasjon S med denne egenskab sådan at $\mathrm{R} \subseteq \mathrm{S}$. For eksempel er den refleksive afslutning av R den mindste refleksive relasjon som indeholder R.

Oppgave 1. Betrakt følgende relasjoner på mengden bestående av 5 punkter:



(a) Avgør for hver av relasjonerne om den er refleksiv, om den er symmetrisk og om den er transitiv.
(b) Bestem for hver av relasjonerne dens refleksive, dens symmetriske samt dens transitive avslutning.

Oppgave 2. Bevis eller modbevis: Alle 8 combinasjoner av egenskaberne *refleksiv*, *symmetrisk* og *transitiv* eller manglen på disse er realiseret i en relasjon.

Oppgave 3. Vi definerer *en-mindre-end*-relasjonen på $\mathbb{Z}$ således: For $a, b \in \mathbb{Z}$ er $a \,\mathrm{R}\, b$ hvis $b = a + 1$.

(a) Hvad er den transitive avslutning av *en-mindre-end*-relasjonen?
(b) Hvad er den symmetrisk-transitive avslutning av *en-mindre-end*-relasjonen?

Ekvivalensrelasjoner

En relasjon kaldes en *ekvivalensrelasjon* hvis den er refleksiv, symmetrisk og transitiv.

Oppgave 4. Vis at følgende relasjoner $\sim$ på $\mathbb{Z}$ er ekvivalensrelasjoner:

(a) $a \sim b$ hvis $|a - 3| = |b - 3|$.
(b) $a \sim b$ hvis 5 er en divisor i $a - b$.

Vis dette på 2 måder: Først ved at vise at $\sim$ er refleksiv, symmetrisk og transitiv. Dernæst ved at identifisere ekvivalensklasserne og se at de partisjonerer $\mathbb{Z}$.

Oppgave 5. Vis for hver af følgende relasjoner på $\mathbb{R}^2$ at de er ekvivalensrelasjoner og giv en enkel beskrivelse av deres ekvivalensklasser:

(a) $(x, y) \sim (x', y')$ hvis der findes et $\theta \in [0, 2\pi)$ således at

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

(b) $(x, y) \sim (x', y')$ hvis $x - x' \in \mathbb{Z}$ og $y - y' \in \mathbb{Z}$.

Oppgave 6. La $S = \{(a,b) \in \mathbb{Z}^2 : b \neq 0\}$. Vi definerer en relasjon $\sim$ på S således: $(a,b) \sim (c,d)$ hvis $ad = bc$.

(a) Vis at $\sim$ er en ekvivalensrelasjon ved at vise at $\sim$ er refleksiv, symmetrisk og transitiv.
(b) Skriv 3 forskellige elementer op fra ekvivalensklassen for $(2,3)$.
(c) Lad $(a,b) \in S$ være så a og b er relativt primiske. Find en formel for elementerne i ekvivalensklassen $[(a,b)]$.

Oppgave 7. Hvor mange ekvivalensrelasjoner er der på en mengde med 4 elementer? Tegn et billede av hver mulig ekvivalensrelasjon og sorter dem i et hieraki efter finhed.

Oppgave 8. Find fejlen i følgende utsagn og giv et moteksempel: "I definisjonen av en ekvivalensrelasjon er antagelsen at relasjonen ska være refleksiv redundant: Hvis $x \sim y$ er $y \sim x$, da relasjonen er symmetrisk. Med transitivitet får vi da at $x \sim x$."