OPPGAVER: UKE 7

Funksjoner: Injektivitet og surjektivitet

Oppgave 1. La X og Y være mengder og la $f : X \to Y$ være en funksjon.
Left cancellation:

(a) Anta at f er injektiv. La X_0 være en mengde og la $g : X_0 \to X$ og $h : X_0 \to X$ være funksjoner. Vis at hvis $f \circ g = f \circ h$ så er $g = h$.
(b) Anta at det for alle mengder X_0 og alle funksjoner $g : X_0 \to X$ og $h : X_0 \to X$ gælder, at hvis $f \circ g = f \circ h$ så er $g = h$. Vis at f er injektiv.

Right cancellation:

(c) Anta at f er surjektiv. La Y_0 være en mengde og la $g : Y \to Y_0$ og $h : Y \to Y_0$ være funksjoner. Vis at hvis $g \circ f = h \circ f$ så er $g = h$.
(d) Anta at det for alle mengder Y_0 og alle funksjoner $g : Y \to Y_0$ og $h : Y \to Y_0$ gælder, at hvis $g \circ f = h \circ f$ så er $g = h$. Vis at f er surjektiv.

Oppgave 2. Færdiggør beviset for følgende teorem fra forelæsningen:

La A, B og C være mengder og la $f : A \to B$ og $g : B \to C$ være funksjoner.

(a) Hvis f og g er injektive så er $g \circ f$ injektiv.
(b) Hvis f og g er surjektive så er $g \circ f$ surjektiv.
(c) Hvis $g \circ f$ er injektiv så er f injektiv.
(d) Hvis $g \circ f$ er surjektiv så er g surjektiv.

Oppgave 3. La A være en endelig mengde

(a) Vis, at hvis $f : A \to A$ er injektiv så er f automatisk bijektiv.
(b) Vis, at hvis $f : A \to A$ er surjektiv så er f automatisk bijektiv.

Oppgave 4. Vis at de to følgende utsagn er ekvivalente:

(1) For hvert mengde X (som har mengder som elementer) finnes der en funksjon $f : X \to \bigcup X$ slik at $f(y) \in y$ for hvert $y \in X$.
(2) For alle mengder A og B og hvert surjektive funksjon $F : A \to B$ finnes der en funksjon $G : B \to A$ slik at $F \circ G = \mathrm{id}_B$.

Funksjoner og ekvivalensrelasjoner

La X og Y være mengder og la $f : X \to Y$ være en funksjon. Givet en ekvivalensrelasjon $\sim$ på X siger vi at f *faktoriserer* gennem kvotienten $X/_\sim$ hvis der findes en funksjon $h : X/_\sim \to Y$ slik at $f = h \circ q$, hvor $q : x \to X/_\sim$ er den *kanoniske kvotientavbildning* (eller den *kanoniske surjeksjon*). Vi kan illustrere faktorisering ved et diagram således:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "q"'] & Y \\ X/_\sim \arrow[ur, "h"'] & \end{tikzcd}$$

Oppgave 5. I denne oppgave ska vi vise at en faktorisering, når den finnes, er unik. La X og Y være mengder, la $f : X \to Y$ være en funksjon og anta at $\sim$ er en ekvivalensrelasjon på X slik at f faktoriserer gennem $X/_\sim$. Vis, at hvis $h_1 : X/_\sim \to Y$ og $h_2 : X/_\sim \to Y$ opfylder at $h_1 \circ q = f = h_2 \circ q$, så er $h_1 = h_2$.

Oppgave 6. La X og Y være mengder og la $f : X \to Y$ være en funksjon. Vi definerer en relation $\sim_f$ på X således: $x \sim_f y$ hvis $f(x) = f(y)$.

(a) Vis, at $\sim_f$ er en ekvivalensrelasjon.
(b) Vis, at f faktoriserer gennem $X/_{\sim_f}$.
(c) La $\overline{f} : X/_{\sim_f} \to Y$ være funksjonen definert ved $f = \overline{f} \circ q$, hvor $q : X \to X/_{\sim_f}$ er den kanoniske kvotientavbildning. Vis, at $\overline{f}$ er injektiv.

Oppgave 7. La $\sim_f$ være ekvivalensrelasjonen fra oppgave 6 og la $\sim$ være en annen ekvivalensrelasjon på X. Vi siger at $\sim$ *er finere end* $\sim_f$ hvis $[x]_\sim \subset [x]_f$, for alle $x \in X$, hvor $[\,\cdot\,]_\sim$ og $[\,\cdot\,]_f$ noterer ekvivalensklasserne for $\sim$, henholdsvist, $\sim_f$.

(a) Vis, at f faktoriserer gennem $X/_\sim$ hvis og kun hvis $\sim$ er finere end $\sim_f$.
(b) Anta, at f faktoriserer gennem $X/_\sim$ og la $h : X/_\sim \to Y$ være funksjonen definert ved $f = h \circ q$, hvor $q : X \to X/_\sim$ er den kanoniske kvotientavbildning. Vis at h er injektiv hvis og kun hvis $\sim$ er relasjonen $\sim_f$.