OPPGAVER: UKE 8

Oppgave 1. En følge $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in A^{\mathbb{N}}$ er konstant dersom der finnes $x \in A$ slik at for hver $n \in \mathbb{N}$ vi har $u_n = x$. Vis at dette er ekvivalent med at for hver $n \in \mathbb{N}$ vi har $u_{n+1} = u_n$.

Oppgave 2 (Egenskaber av multiplikasjon)**.** For hvert $m \in \mathbb{N}$ konstruerer vi en funksjon $p_m : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ ved hjelp av rekursjonsteoremet fra forelesningen slik at

$$p_m(0) = 0 \text{ og for hvert } n \in \mathbb{N} \text{ er } p_m(S(n)) = p_m(n) + m.$$

Vi definerer multiplikasjonen av $n, m \in \mathbb{N}$ som

$$m \cdot n = p_m(n).$$

Vis følgende egenskaber av multiplikasjonen for vilkårlige elementer $n, m, k \in \mathbb{N}$:

(1) **1 er nøytral**: $m \cdot 1 = m$.
(2) **Assosiativitet**: $(k \cdot m) \cdot n = k \cdot (m \cdot n)$.
(3) **Kommutativitet**: $k \cdot m = m \cdot k$.
(4) **Kansellering**: Hvis $m \cdot k = n \cdot k$ så er $n = m$.

Oppgave 3 (Distributivitet)**.** For addisjon og multiplikasjon på $\mathbb{N}$ som introdusert i forelesningen, vis at for alle $n, m, k \in \mathbb{N}$ har vi

$$k \cdot (m + n) = k \cdot m + k \cdot n.$$

Oppgave 4 (Unikhet av $\mathbb{N}$)**.** La $\mathbb{N}'$ være en mengde med en element $0' \in \mathbb{N}'$ og en funksjon $S' : \mathbb{N}' \to \mathbb{N}'$ som oppfyller Peanos aksiomer:

(1) Funksjonen S' er injektiv.
(2) Elementet $0' \notin V_{S'}$.
(3) Hvis $A \subseteq \mathbb{N}'$ er en delmengde slik at $0' \in A$ og for hvert $n \in A$ er også $S'(n) \in A$ så er $A = \mathbb{N}'$.

Vis at der finnes en bijektiv funksjon $\phi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}'$ slik at $\phi(0) = 0'$ og $S' \circ \phi = \phi \circ S$.

Oppgave 5 (Uendlighet)**.** Vi sier at to mengder X og Y er *ekvivalente* hvis der finnes en bijektiv funksjon $f : X \to Y$. En mengde X kalles *endelig* hvis den er ekvivalent med et naturligt tall $n \in \mathbb{N}$, og ellers kalles den *uendelig*.

(1) Vis at hver endelig mengde X er ekvivalent med akurat ét naturligt tall $n \in \mathbb{N}$.
(2) Vis at for hver endelig mengde X og hver delmengde $Y \subseteq X$ slik at $Y \neq X$ har vi at X og Y ikke er ekvivalente.
(3) Vis at mengden $\mathbb{N}$ er uendlig.