OPPGAVER: UKE 9

Struktur på $\mathbb{N}$

Oppgave 1. La $n, m \in \mathbb{N}$ og la $k \in \mathbb{N}^*$. Vis, at hvis $n < m$ så er $n \cdot k < m \cdot k$ og $n + k < m + k$.

Oppgave 2 (Kansellering)**.** I denne opgave skal vi vise kanselleringsegenskaben for de 2 aritmetiske operationer $+$ og $\cdot$ på $\mathbb{N}$. Lad k, n og m være elementer i $\mathbb{N}$.

(1) Vis at hvis $n + k = m + k$ så er $n = m$.
(2) Antag at $k \neq 0$ og vis at hvis $n \cdot k = m \cdot k$ så er $n = m$.

Oppgave 3. La oss introdusere en orden på de naturlige tall: For naturlige tall $n, m \in \mathbb{N}$ sier vi $n \leq^* m$ hvis der finnes $k \in \mathbb{N}$ slik at $n + k = m$.

(1) Vis at $\leq^*$ er en ordensrelasjon og at den definerer en total orden på $\mathbb{N}$.
(2) Vis at for $n, m \in \mathbb{N}$ vi har $n \leq m$ hvis og bare hvis $n \leq^* m$.

Struktur på $\mathbb{Z}$

Oppgave 4 (Multiplikation på $\mathbb{Z}$)**.** Husk at $\mathbb{Z}$ er defineret som kvotienten $\mathbb{N}\times\mathbb{N}/\sim$, hvor $(a, b) \sim (c, d)$ hvis $a + d = b + c$, for $a, b, c, d \in \mathbb{N}$. Vi definerer multiplikation på $\mathbb{Z}$ således: For $a, b, c, d \in \mathbb{N}$ er

$$[a, b] \cdot [c, d] = [ac + bd, ad + bc].$$

(1) Vis at $\cdot$ er en veldefineret avbildning $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$.
(2) Vis at $(\mathbb{Z}, \cdot)$ er en kommutativ monoid med nøytralt element $[1, 0]$.
(3) Vis at $\mathbb{Z}$ med $+, \cdot, 0, 1$ er et integritetsområde.

Oppgave 5 ($\mathbb{N}$ som delmængde av $\mathbb{Z}$)**.** Med vores definition av $\mathbb{Z}$ er $\mathbb{N}$ *ikke* en delmængde av $\mathbb{Z}$. Men vi kan alligevel betragte $\mathbb{N}$ som en delmængde av $\mathbb{Z}$ ved at *indlejre* $\mathbb{N}$ i $\mathbb{Z}$ på en passende måde. Dvs. ved at finde en passende injektiv avbildning fra $\mathbb{N}$ ind i $\mathbb{Z}$. I denne opgave skal vi se at der er mange måder at indlejre $\mathbb{N}$ i $\mathbb{Z}$, men at ikke alle måder respekterer den aritmetiske struktur.

Givet en avbildning $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ siger vi at φ er *additiv* hvis

$$\varphi(n + m) = \varphi(n) + \varphi(m), \qquad \text{for alle } n, m \in \mathbb{N}.$$

Videre siger vi at φ er *multiplikativ* hvis

$$\varphi(n \cdot m) = \varphi(n) \cdot \varphi(m), \qquad \text{for alle } n, m \in \mathbb{N}.$$

(1) La $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ være en følge i $\mathbb{N}$ som opfylder at $u_{n+1} > u_n$, for alle $n \in \mathbb{N}$. Vis at avbildningen $\varphi_u : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ givet ved $\varphi_u(n) = [(u_n, 0)]$ er injektiv. Konkluder at der er uendeligt mange måder at indlejre $\mathbb{N}$ i $\mathbb{Z}$.

(2) Betragt følgende avbildninger:

$$\varphi_+ : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{Z} \qquad \varphi_\Delta : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{Z} \qquad \varphi_- : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{Z}$$
$$n \longmapsto [(n, 0)] \qquad n \longmapsto [(n, n)] \qquad n \longmapsto [(0, n)]$$

$$\varphi_2 : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{Z} \qquad \varphi_{\mathrm{sq}} : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{Z}$$
$$n \longmapsto [(2n, 0)] \qquad n \longmapsto [(n \cdot n, 0)]$$

Afgør for hver af avbildningerne om den er injektiv, om den er additiv og om den er multiplikativ.