MAT2000

Forslag til prosjektoppgaver

Veileder: Ole Fredrik Brevig
obrevig@math.uio.no

1 Bernoulli-polynomer

Bernoulli-polynomene har flere ekvivalente definisjoner. For eksempel kan vi starte med $B_0(x) = 1$ og for $n \geq 1$ definere B_n rekursivt ved formelen

$$B_n(x) = B_n(0) + n \int_0^x B_{n-1}(y)\, dy.$$

Konstantleddene $B_n(0)$ kalles Bernoulli-tallene og velges slik at

$$\int_0^1 B_n(x)\, dx = 0.$$

De neste fem polynomene blir følgelig

$$B_1(x) = x - \frac{1}{2}, \qquad B_2(x) = x^2 - x + \frac{1}{6}, \qquad B_3(x) = x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{2}x,$$

$$B_4(x) = x^4 - 2x^3 + x^2 - \frac{1}{30}, \qquad B_5(x) = x^5 - \frac{5}{2}x^4 + \frac{5}{3}x^3 - \frac{1}{6}x.$$

Bernoulli-polynomer og Bernoulli-tall har mange interessante egenskaper, og prosjektet vil gå ut på å sette seg inn i et utvalg av disse.

For reelle tall $\sigma > 1$ er Riemanns zeta-funksjon definert ved

$$\zeta(\sigma) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\sigma}. \tag{1.1}$$

Verdens beste matematikere hadde forsøkt å regne ut summen for $\sigma = 2$ i nesten 100 år da Euler i 1734 fant svaret $\zeta(2) = \pi^2/6$. Euler hadde en viktig fordel — han visste hva svaret var. Rekken $\zeta(2)$ konvergerer veldig sakte, men ved hjelp av Bernoulli-polynomer klarte Euler å finne et så godt estimat for rekken at han gjenkjente desimalene til $\pi^2/6$.

Euler regnet også ut $\zeta(2k)$ for $k = 1, 2, 3, \ldots$ og det viser seg at svaret inneholder Bernoulli-tallene.

$$\zeta(2k) = \frac{(-1)^{k+1} B_{2k}(0)(2\pi)^{2k}}{2(2k)!}. \tag{1.2}$$

Man kan bevise (1.2) ved hjelp av Bernoulli-polynomer og Parsevals identitet fra Fourier-analysen. Eulers metode for å finne gode estimater for uendelige rekker som (1.1) er helt elementær — det gjelder bare å bruke delvis integrasjon på en smart måte!

Anbefalte forkunnskaper. MAT2100 eller MAT2400.

2 Riemann-hypotesen

Euklid beviste at det finnes uendelig mange primtall. La $\pi(x)$ betegne antall primtall i intervallet $[0, x]$. Gauss og Legendre formodet at

$$\pi(x) \approx \frac{x}{\log x}.$$

Basert på en et banebrytende arbeid av Riemann fra 1860, som beskriver en sammenheng mellom primtallene og kompleks analyse, klarte Hadamard og de la Vallée Poussin i 1896 å bevise at når $x \to \infty$ er

$$\pi(x) = \frac{x}{\log x} + E(x). \tag{2.1}$$

Her er E et feilledd som (i absoluttverdi) vokser saktere enn $x/\log x$. Dette resultatet kalles primtallssatsen. Prosjektets hovedmål er å forklare sammenhengen mellom feilleddet og nullpunktene til Riemanns zeta-funksjon.

For komplekse tall $s = \sigma + it$ med $\sigma > 1$, har Riemanns zeta-funksjon to ekvivalente definisjoner.

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \prod_{p \in \mathbb{P}} \frac{1}{1 - p^{-s}}. \tag{2.2}$$

I det uendelige produktet på høyre side betegner $\mathbb{P}$ primtallene. Formelen uttrykker samspillet mellom heltallenes additive og multiplikative struktur.

Terry Tao har beskrevet koblingen mellom (2.1) og (2.2) på følgende måte:

1. Betrakt funksjonen $\pi(x)$ som et lydsignal på $[0, \infty)$.
2. "Lytt" til lydsignalet ved hjelp av Fourier-transformasjonen.
3. Vis at hver "note" i primtallenes musikk svarer til et nullpunkt $\zeta(s) = 0$, og at lydsignalet kan gjenskapes fra notene.
4. Primtallssatsen er ekvivalent med at visse noter aldri spilles. Riemann-hypotesen sier at notene som spilles danner en "akkord".

Riemann-hypotesen er et av syv Millennium Problems fra Clay Mathematical Institute, og en løsning belønnes med 1 million dollar. Det er ikke forventet at Riemann-hypotesen løses som en del av prosjektet.

Anbefalte forkunnskaper. MAT2100 eller MAT2400 og MAT2410.