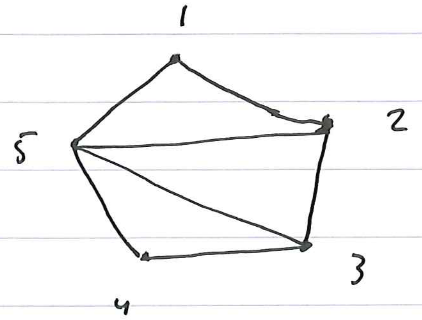
L. FORSLAG.

(1)

a) G:




b)

Nabomatrise

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

c) En graf er Eulersk om det fins en sykel som inneholder hver kant nøyaktig en gang.

En graf er Hamiltonsk om det fins en sykel som inneholder hvert hjørne nøyaktig en gang.

En graf er Eulersk bare om hvert hjørne har et jevnt antall naboer. Hjørnene 2 og 3 har tre naboer så G er ikke Eulersk. Sykelen 1 - 2 - 3 - 4 - 5 - 1 viser at G er Hamiltonsk.

1 d) Utspenningstrær i G:

Hvert utspenningstre må inneholde en kant til 1 : 2 stk

— 〃 — 4 : 2 stk

— 〃 — to av de tre kantene mellom 2, 3 og 5 : 3 stk.

Tilsammen $2 \times 2 \times 3 = 12$ utspenningstrær.

2) $\pi : \{1 \dots n\} \to \{1 \dots n\}$ permutasjon.

$A_{n,k} = \# \{ \pi \mid \pi(i) < \pi(i+1) \text{ for nøyaktig } k \text{ tall } i \}$

〃 $B_{n,k}$

a) $n = 4$: $(\pi(1), \pi(2), \pi(3), \pi(4)) =$

$(1\,2\,3\,4)$ $\in B_{4,3}$

$(1\,3\,2\,4)$ $(1\,3\,4\,2)$ $(1\,2\,4\,3)$ $(1\,4\,2\,3)$
$(2\,1\,3\,4)$ $(2\,3\,1\,4)$ $(2\,3\,4\,1)$ $(2\,4\,1\,3)$
$(3\,1\,2\,4)$ $(3\,4\,1\,2)$ $(4\,1\,2\,3)$
$\in B_{4,2}$

$(1\,4\,3\,2)$ $(2\,1\,4\,3)$ $(2\,4\,3\,1)$
$(3\,1\,4\,2)$ $(3\,2\,1\,4)$ $(3\,2\,4\,1)$ $(3\,4\,2\,1)$
$(4\,1\,3\,2)$ $(4\,2\,1\,3)$ $(4\,2\,3\,1)$ $(4\,3\,1\,2)$
$\in B_{4,1}$

$(4\,3\,2\,1)$ $\in B_{4,0}$

så $A_{4,0} = \# B_{4,0} = 1$

$A_{4,1} = \# B_{4,1} = 11$

$A_{4,2} = \# B_{4,2} = 11$

$A_{4,3} = \# B_{4,3} = 1$

(kan og bruke 2c)

(2) b)

La $\pi : \{1, \dots, n-1\} \to \{1, \dots, n-1\}$ være en permutasjon med $k$ tall $i$ slik at $\pi(i) < \pi(i+1)$. Utvid denne til en permutasjon $\pi' : \{1 \dots n\} \to \{1, \dots, n\}$ ved å la $\pi'(i+1) = n$, $\pi'(j) = \pi(j)$ $j \leq i$, $\pi'(j) = \pi(j-1)$, $j \geq i+2$, for en $i$ der $\pi(i) < \pi(i+1)$. Da vil $\pi' \in B_{n,k}$.

Det er $k+1$ slike muligheter for hver $\pi$ i alt $(k+1) \cdot A_{n-1,k}$.

La så $\pi : \{1, \dots, n-1\} \to \{1, \dots n-1\}$ være en permutasjon med $k-1$ tall $i$ slik at $\pi(i) < \pi(i+1)$. Utvid denne til en $\pi' : \{1 \dots n\} \to \{1 \dots n\}$ ved å la $\pi'(i+1) = n$, $\pi'(j) = \pi(j)$ $j \leq i$, $\pi'(j) = \pi(j-1)$, $j \geq i+2$ for en $i$ der $\pi(i) > \pi(i+1)$

Da vil $\pi' \in B_{n,k}$. Det er $n-k$ slike muligheter for hver $\pi$,

i alt $(n-k) A_{n-1,k-1}$

Hver $\pi' \in B_{n,k}$ er en av disse to mulighetene (se også oppg 1.36 i Boka)

Så $A_{n,k} = (n-k) A_{n-1,k-1} + (k+1) A_{n-1,k}$

③ $C \subseteq \{0,1\}^6$:

$$= \{\underset{A}{(000000)}, \underset{B}{(110100)}, \underset{C}{(101110)}, \overset{D}{(011011)}, \underset{E}{(100111)}\}$$

a) $C$ er ikke lineær siden $|C| = \# C$ ikke er en potens av 2, eller også

$$(110100), (101110) \in C$$

mens $(110100) + (101110) = (011010) \notin C$.

b) Avstander:

$d(A,B) = 3$, $d(A,C) = 4$, $d(A,D) = 4$, $d(A,E) = 4$

$d(B,C) = 3$, $d(B,D) = 5$, $d(B,E) = 3$, $d(C,D) = 4$

$d(C,E) = 2$, $d(D,E) = 4$.

Minimumsdistansen er den minste av disse altså lik $\underline{\underline{2}}$.

c) $(100000)$ har avstand 1 til $A = (000000)$ og bare dette kodeordet i $C$.

Siden minimumsavstanden er 2, så er $t = 1$ det største antall feil koden kan finne.

Siden $\frac{2}{2} - 1 = 0$ så kan $C$ ikke rette en feil.

d) En syklisk kode i $\{0,1\}^6$ er generert av en faktor i $x^6 + 1 = (x+1)^2(x^2+x+1)^2$

Bruker faktor $x+1$ og får generatormatrise

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

minste vekt = minimumsdistanse = 2!

④ RSA

$(n,k) = (33, 3)$

a) $n = 3 \cdot 11$, så enhetene i $\mathbb{Z}_{33}$ er $\approx \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_{10}$.

$3 \cdot k \equiv 1 \quad (20)$ — k privat nøkkel

så $\underline{k \equiv 7 \quad (20)}$. — 7 er Annes private nøkkel.

b) $m^3 \equiv 8 \quad (33)$

da er
$$\underline{\underline{m}} \equiv (m^3)^7 \equiv 8^7 \quad (33)$$
$$\equiv 64 \cdot 8^5 \quad (33)$$
$$\equiv (-2) \cdot 8^5 \quad (33)$$
$$\equiv (-2)\cdot(-2)\cdot(-2)\cdot 8 \quad (33)$$
$$= \underline{\underline{2}} \quad \underline{(33)}$$

c) $(n,k) = (33, 7)$. B's private nøkkel er 3 siden $3 \cdot 7 \equiv 1 \quad (20)$.

$m = m_1\, m_2\, m_3\, m_4\, m_5\, m_6$.

$m_1^7 = 27 \quad m_2^7 = 20 \quad m_3^7 = 13 \quad m_4^7 = 16 \quad m_5^7 = 01 \quad m_6^7 = 28$

så
$$m_1 \equiv (m_1^7)^3 \equiv 27^3 \equiv (-6)^3 \quad (33)$$
$$\equiv 3 \cdot (-6) \quad (33)$$
$$\equiv 15 \quad (33)$$

$$m_2 \equiv (m_2^7)^3 \equiv 20^3 \equiv (-13)^3 \quad (33)$$
$$\equiv 4 \cdot (-13) \quad (33)$$
$$\equiv 14 \quad (33)$$

$m_3 \equiv 13^3 \equiv -14 \equiv 19 \quad (33)$

$m_4 \equiv 16^3 \equiv -8 \cdot 16 \quad (33)$
$\equiv 4 \quad (33)$

$m_5 = 1^3 \equiv 1 \quad (33)$

$m_6 \equiv 28^3 \equiv (-5)^3 \equiv 7 \quad (33)$

15 = O  14 = N  19 = S  04 = D  01 = A  07 = G  så

m = ONSDAG.