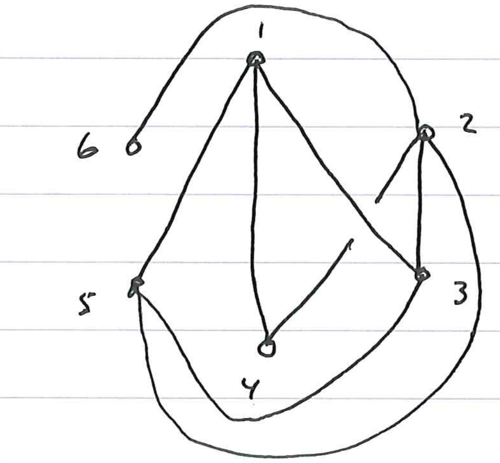
PRØVEEKSAMEN MAT 2250 VÅR 2022

LØSNINGSFORSLAG

(1)

a)

G :



Nabomatrise

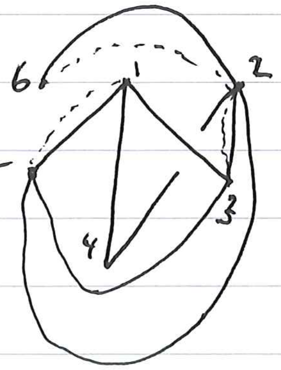
$$\begin{array}{c|c} & \begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

b) En graf er Eulersk om den er sammenhengende og hvert hjørne har jevn grad.

Hjørne "6" har grad <u>en</u>, ikke jevnt, så G er <u>ikke</u> Eulersk.

Siden "6" har grad <u>en</u>, har G ingen Hamiltonsk sykel, en ~~ste~~ sykel som er innom alle hjørner må være innom "2" to ganger.

c)



EKSTRA KANTER MELLOM "ODDE" HJØRNER: 1 3 5 6

KORTESTE SYKEL GJENNOM ALLE KANTER:

1 3 2 6 2 5 1 5 3 2 4 1

(2)

a) $s(n,k)$: Antall permutasjoner av en n-mengde med k disjunkte sykler.

$S(n,k)$: Antall partisjoner av en n-mengde i k disjunkte delmengder.

Hver permutasjon med k sykler bestemmer en partisjon med k disjunkte delmengder, og hver slik partisjon bestemmer minst en slik permutasjon så

$$S(n,k) \leq s(n,k).$$

$S(n,k) = s(n,k)$ hvis og bare hvis antall sykler på hver delmengde er en, det vil si hver delmengde har ett eller to elementer.

√.

② a fortsettelse:

partisjonene av en n-mengde i k delmengder inneholder bare delmengder med ett eller to elementer dersom det er mulig med høyst en delmengde med to elementer, det vil si

$$k = n-1 \text{ eller } k = n.$$

Så

$$s(n,k) = S(n,k) \iff k = n-1 \text{ eller } k = n \quad (n,k \geq 1).$$

b) $$S_{n,k} = S_{n-1,k-1} + k S_{n-1,k} \quad (n,k > 0)$$

#{partisjoner av $\{1,..,n\}$ i k delmengder}

= #{partisjoner av $\{1,..,n\}$ i k delmengder, slik at $\{n\}$ er en av delmengdene}

=

#{partisjoner av $\{1,..,n-1\}$ i $k-1$ delmengder} + #{partisjoner av $\{1,..,n\}$ i k delmengder, slik at $\{n\}$ ikke er en av delmengdene}

=

$k \cdot$ #{partisjoner av $\{1,..,n-1\}$ i ~~[illegible]~~ k delmengder}

$$\left(S_{n,k} = S(n,k) \right)$$

c) Vil vise

$$S_{n+1,k+1} = \sum_{i=k}^{n} \binom{n}{i} S_{i,k}$$

$\#\{$partisjoner av $\{1,\dots,n+1\}$ i $k+1$ delmengder$\}$

$= \#\{$partisjoner av $\{1,\dots,n+1\}$ i $k+1$ delmengder, der $n+1$ er i en delmengde med ~~...~~ $n-i$ andre elementer$\}_{i=k,k+1,\dots,n}$

$= \#\{$delmengder av $\{1,\dots,n\}$ med $n-i$ elementer$\} \cdot \#\{$partisjoner av en i-mengde i k delmengder$\}_{i=k,\dots,n}$

$\binom{n}{n-i} = \binom{n}{i}$ $\qquad$ $\#\{$delmengder av $\{1,\dots,n\}$ med $n-i$ elementer$\} = \binom{n}{n-i}$ $\qquad$ $\#\{$partisjoner av en i-mengde i k delmengder$\} = S_{i,k}$. $\square$

③

a) skal vise at det fins et 2-design med parametre $(7,3,2)$.

La U være en mengde 3-delmengder av $\{1,2,\dots,7\}$.

La I være insidensen

$$I = \{ (A,B) \mid A \text{ er en 2-mengde i } \{1,2,\dots,7\}, B \in U \}$$

$\#\{2\text{-mengder i } \{1,2,\dots,7\}\} = \binom{7}{2} = 21$, hver 2-mengde er i to mengder $B \in U$, så $\#I = 2 \cdot 21 = \underline{42}$

Hver delmengde B inneholder 3 2-delmengder

så $\#U = 42 : 3 = \underline{\underline{14}}$

③ b)

Et 2-design med parametre $(5,3,3)$:

$\mathcal{U}$ = alle 3-delmengder av $\{1,2,\ldots,5\}$

Et 1-design med parametre $(5,2,\lambda)$:

Hvert element i $\{1,2,\ldots,5\}$ er inneholdt i λ delmengder i $\mathcal{U}$:

Hvis $\mathcal{U}$ er alle 2-delmengder, så er hvert ~~element~~ element med i 4 2-delmengder.

så $\lambda = 4$ gir et 1-design med parametre $(5,2,4)$

④ a)

$C \subseteq \{0,1\}^8$ med generator matrise

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Paritetsjekk matrise: (5×8) matrise s.a $G \times H^t = 0$.

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

eller også:

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

b)

minimumsavstand er minste antall 1-ere i et kodeord.

Kodeordene i C er

(0 0 0 0 0 0 0 0)	
(1 0 1 0 1 0 1 0)	A
(0 0 1 1 1 1 0 0)	B
(1 1 1 1 1 1 1 1)	C
(1 0 0 1 0 1 1 0)	A+B
(0 1 0 1 0 1 0 1)	A+C
(1 1 0 0 0 0 1 1)	B+C
(0 1 1 0 1 0 0 1)	A+B+C

så minimumsavstand er 4 !

C oppdager 3 feil $(3<4)$

C retter 1 feil. $(1<\frac{4}{2})$

c) $v \in \{0,1\}^8$ $d_0 = \max\{d_C(v) \mid v \in \{0,1\}^8\}$ =

minste d slik at $d(v,u) \leq d$ for en $u \in C$, for hver v.

$\# \{0,1\}^8 = 2^8 = 256$

La $B_d(u) = \{v \in \{0,1\}^8 \mid d(v,u) \leq d\}$

$\# B_d(u)$ er uavhengig av u, og $\# B_2(0,0..0) = 1+8+\binom{8}{2} = \underline{37}$

$\# B_1(0,..0) = 9$.

$\underline{d_0} = \min\{d \mid \bigcup_{u\in C} B_d(u) = \{0,1\}^8\}$

$= \min\{d \mid \sum_{u\in C} |B_d(u)| \geq 256\} = \min\{d \mid 8 \cdot |B_2(0,0..0)| \geq 256\}$

$\underline{\underline{= 2}}$ $(8 \cdot 37 = 296 > 256)$