25. februar 2022

MAT2250 VÅR 2022

Obligatorisk oppgave

Innleveringsfrist

Torsdag 17. Mars 2022, klokken 14:30 i Canvas (canvas.uio.no).

Du kan levere et foreløpig utkast innen fredag 11. Mars, da vil du få tilbakemelding og mulighet til å levere på ny inn 17. Mars

Instruksjoner

Merk at man har **ett forsøk** på å få oppgaven godkjent. Dette betyr at det ikke lenger gis andregangsforsøk.

Du velger selv om du skriver besvarelsen for hånd og scanner besvarelsen eller om du skriver løsningen direkte inn på datamaskin (for eksempel ved bruk av LaTeX). Besvarelsen skal leveres som én PDF-fil. Scannede ark må være godt lesbare. Besvarelsen skal inneholde navn, emne og oblignummer.

Det forventes at man har en klar og ryddig besvarelse med tydelige begrunnelser. Husk å inkludere alle relevante plott og figurer. Samarbeid og alle slags hjelpemidler er tillatt, men den innleverte besvarelsen skal være skrevet av deg og reflektere din forståelse av stoffet. Er vi i tvil om du virkelig har forstått det du har levert inn, kan vi be deg om en muntlig redegjørelse.

I oppgaver der du blir bedt om å programmere må du legge ved programkoden og levere den sammen med resten av besvarelsen. Det er viktig at programkoden du leverer inneholder et kjøreeksempel, slik at det er lett å se hvilket resultat programmet gir.

Søknad om utsettelse av innleveringsfrist

Hvis du blir syk eller av andre grunner trenger å søke om utsettelse av innleveringsfristen, må du ta kontakt med studieadministrasjonen ved Matematisk institutt (e-post: studieinfo@math.uio.no) senest samme dag som innleveringsfristen.

For å få adgang til avsluttende eksamen i dette emnet, må man bestå alle obligatoriske oppgaver i ett og samme semester.

For fullstendige retningslinjer for innlevering av obligatoriske oppgaver, se her:

www.uio.no/studier/admin/obligatoriske-aktiviteter/mn-math-oblig.html

LYKKE TIL!

Oppgave 1.

(a) Bruk et telleargument til å vise at Stirling tallene av andre type tilfredstiller $S_{n,2} = 2^{n-1} - 1$ for $n \geq 1$ (husk at $S_{0,k} = 0$). Finn et uttrykk for den genererende funksjonen

$$\mathcal{S}_2(z) = \sum_{n=0}^{\infty} S_{n,2} z^n$$

som en rasjonal funksjon.

(b) Bruk rekursjonsformelen $S_{n,k} = S_{n-1,k-1} + kS_{n-1,k}$ og det rasjonale uttrykket for $\mathcal{S}_2(z)$ til å vise at

$$\mathcal{S}_3(z) := \sum_{n=0}^{\infty} S_{n,3} z^n = \frac{z^3}{(1-z)(1-2z)(1-3z)}.$$

(c) Bruk delbrøkoppspalting av den genererende funksjonen $\mathcal{S}_3(z)$ til å finne en lukket formel for $S_{n,3}$.

Oppgave 2. La M_n være en mangekant med $n+2$ hjørner $\{1, 2, ..., n+2\}$. En oppdeling av M_n i n trekanter ved å trekke $n-1$ linjer mellom hjørner som ikke er naboer , kalles en triangulering. La T_n være antall trianguleringer av M_n. Vi setter $T_0 = 1$.

(a) Tegn alle trianguleringer av M_2 og M_3 (henholdsvis 4-kanten og 5-kanten).

(b) Vis at T_n tilfredstiller rekursjonsformelen

$$T_n = \Sigma_{k=0}^{n-1} T_k T_{n-1-k}. \quad n > 1.$$

(Hint: La hjørnene være 1,2,...,n+2 i syklisk rekkefølge. Da vil hver triangulering inneholde en trekant $D(k)$ med hjørner $1, 2, k$ for en k, med $3 \leq k \leq n+2$. Del opp mengden av trianguleringer etter hvilken trekant $D(k)$ som er med.)

(c) Finn en genererende funksjon for T_n.

(d) Vis at $T_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$.

Oppgave 3. En Hamilton-sykel i en graf er en sykel som er innom hvert hjørne nøyaktig en gang.

(a) Finn alle Hamilton-syklene i hyperkuben Q_3 med hjørner $\{(0,0,0),(0,0,1),...,(1,1,1)\}$. List opp rekkefølgen av hjørner i hver sykel.

(b) Finn alle Hamilton-syklene i den komplette bipartite grafen $K_{3,3}$.

(c) Vis at den komplette bipartite grafen $K_{3,4}$ ikke har noen Hamilton-sykler.

(d) Finn en formel for antall Hamilton-sykler i den komplette grafen K_n. Begrunn svaret.