# UNIVERSITETET I OSLO

## Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

| | |
|---|---|
| Eksamen i: | MAT 1300 — Analyse 1. |
| Eksamensdag: | Mandag 6. juni 2005. |
| Tid for eksamen: | 14.30 – 17.30 |
| Oppgavesettet er på 3 sider. | |
| Vedlegg: | Ingen. |
| Tillatte hjelpemidler: | Ingen. |

Kontroller at oppgavesettet er komplett
før du begynner å besvare spørsmålene.

Alle svar må begrunnes.

## Oppgave 1.

Definer

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{når} \quad 0 \leq x \leq \frac{1}{n+1} \\ \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{når} \quad \frac{1}{n+1} < x \leq \frac{1}{n} \\ 0 & \text{når} \quad \frac{1}{n} < x \leq 1 \end{cases}$$

for $n = 1, 2, 3, \ldots$

a) Vis at $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ konvergerer punktvis og finn grensen.

b) Konvergerer $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ uniformt?

c) Konvergerer $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ absolutt for alle $x$?

*(Fortsettes side 2.)*

d) Eksisterer

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_0^1 f_n(x)dx$$

og er i så fall

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_0^1 f_n(x)dx = \int_0^1 \Big( \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \Big) dx \ ?$$

# Oppgave 2.

Anta at $(f_n)$ er en følge av reelle funksjoner på et kompakt metrisk rom $K$ med metrikk $d$ og anta at $(f_n)$ er ekvikontinuerlig i hvert punkt $x \in K$. Anta at $(f_n)$ konvergerer punktvis mot en funksjon $f$, i.e. $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ for hver $x \in K$.

a) Vis at for alle $\epsilon > 0$ og $x \in K$ så finnes en $\delta = \delta(\epsilon, x) > 0$ og en $N = N(\epsilon, x) \in \mathbb{N}$ slik at hvis $y \in K$ og $d(y, x) < \delta$ og $n \geq N$ så er $|f_n(y) - f(y)| < \epsilon$.

b) Vis fra a) at $f_n$ konvergerer uniformt mot $f$.

# Oppgave 3.

a) Vis at ligningssystemet

$$\begin{aligned} xy^2 + xzu + yv^2 &= 3 \\ u^3yz + 2xv - u^2v^2 &= 2 \end{aligned}$$

kan løses med hensyn på $u$ og $v$ som funksjoner av $x, y, z$ i en åpen omegn om $(x, y, z) = (1, 1, 1)$, $(u, v) = (1, 1)$.

b) Hvis $u = u(x, y, z)$ og $v = v(x, y, z)$ er løsningen fra a), så beregn $\frac{\partial v}{\partial y}(1, 1, 1)$.

*(Fortsettes side 3.)*

# Oppgave 4.

Definer en funksjon $\varphi : [0,1] \to \mathbb{R}$ ved at

$$\varphi(x) = \begin{cases} 0 & \text{hvis } x \text{ er irrasjonal} \\ \frac{1}{q} & \text{hvis } x = \frac{p}{q} \text{ med } p \in \mathbb{Z},\ q \in \mathbb{N} \text{ og } p, q \text{ har ingen felles faktorer.} \end{cases}$$

Definer en funksjon $f$ på intervallet $A = [0,1]$ ved

$$f(x) = e^{\varphi(x)}$$

a) Finn mengden $D$ av punkter $x \in A$ slik at $f$ er diskontinuerlig i $x$. Har $D$ innhold 0? Har $D$ mål 0?

b) Begrunn fra et generellt teorem at $f$ er (Riemann) integrerbar over $A$.

c) Finn $\int_A f$.

SLUTT