UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i:	MAT2400 — Reell analyse
Eksamensdag:	Tirsdag 4. juni 2013
Tid for eksamen:	14.30 – 18.30
Oppgavesettet er på 2 sider.	
Vedlegg:	Ingen
Tillatte hjelpemidler:	Ingen

Kontroller at oppgavesettet er komplett før
du begynner å besvare spørsmålene.

Alle deloppgaver (Oppgave 1, 2, 3a, 3b, osv) teller 10 poeng.

Oppgave 1: Vis at følgen $f_n(x) = nxe^{-nx^2}$ konvergerer punktvis på intervallet $[0, 1]$ og avgjør om konvergensen er uniform.

Oppgave 2: Anta at (X, d) er et metrisk rom og at $\{f_n\}$ og $\{g_n\}$ er to følger av funksjoner fra X til $\mathbb{R}$ som konvergerer uniformt mot henholdsvis f og g. Vis at $\{f_n + g_n\}$ konvergerer uniformt mot $f + g$.

Oppgave 3: I denne oppgaven er μ Lebesgue-målet på $\mathbb{R}$, og $\mathcal{A}$ er σ-algebraen av Lebesgue-målbare mengder. Vi skriver $L^1(\mu)$ som en forkortelse for $L^1(\mathbb{R}, \mathcal{A}, \mu)$, og vi lar $\|\cdot\|_1$ betegne L^1-normen (dvs. $\|f\|_1 = \int |f|\, d\mu$).

a) Vis at for hver $f \in L^1(\mu)$ finnes det en følge $\{g_n\}$ av enkle funksjoner som konvergerer mot f i $L^1(\mu)$ (dvs. $\|f - g_n\|_1 \to 0$ når $n \to \infty$).

For enhver $A \in \mathcal{A}$ og enhver $\epsilon > 0$ finnes det en kontinuerlig funksjon $h : \mathbb{R} \to [0, 1]$ slik at $\mu(\{x \in \mathbb{R} \mid h(x) \neq \mathbf{1}_A(x)\}) < \epsilon$. Dette kan du bruke fritt (og uten å bevise det) i resten av oppgaven.

b) Vis at $\|\mathbf{1}_A - h\|_1 < \epsilon$ når A og h er som ovenfor.

c) Vis at for enhver enkel funksjon $g \in L^1(\mu)$ og enhver $\epsilon > 0$ finnes det en kontinuerlig funksjon h slik at $\|g - h\|_1 < \epsilon$.

d) Vis at for enhver $f \in L^1(\mu)$ finnes det en følge $\{h_n\}$ av kontinuerlige funksjoner slik at $\|f - h_n\|_1 \to 0$

Oppgave 4: I denne oppgaven er $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ et reelt Hilbertrom (dvs. et komplett indreproduktrom over $\mathbb{R}$) med ortonormal basis $\{\mathbf{e}_i\}_{i\in\mathbb{N}}$.

a) La $\{\mathbf{u}_n\}$ og $\{\mathbf{v}_n\}$ være to følger i H. Vis at dersom $\lim_{n\to\infty} \mathbf{u}_n = \mathbf{u}$ og $\lim_{n\to\infty} \mathbf{v}_n \to \mathbf{v}$, så er $\lim_{n\to\infty}\langle \mathbf{u}_n, \mathbf{v}_n\rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle$.

b) Vis at dersom $\mathbf{u} = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i \mathbf{e}_i$ og $\mathbf{v} = \sum_{i=1}^{\infty} \beta_i \mathbf{e}_i$ er to elementer i H, så er $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i\beta_i$.

(Fortsettes på side 2.)

En *lineærfunksjonal* på H er en funksjon $A : H \to \mathbb{R}$ slik at

(i) $A(\alpha \mathbf{u}) = \alpha A(\mathbf{u})$ for alle $\alpha \in \mathbb{R}$ og $\mathbf{u} \in H$.

(ii) $A(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = A(\mathbf{u}) + A(\mathbf{v})$ for alle $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in H$.

I resten av oppgaven er A en lineærfunksjonal.

c) Vis at

(I) $A(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mathbf{u}_i) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i A(\mathbf{u}_i)$ for alle $n \in \mathbb{N}$, alle $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ og alle $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n \in H$

(II) $A(\mathbf{u} - \mathbf{v}) = A(\mathbf{u}) - A(\mathbf{v})$ for alle $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in H$.

Fra nå av antar vi at det finnes et tall $M \in \mathbb{R}$ slik at $|A(\mathbf{u})| \leq M\|\mathbf{u}\|$ for alle $\mathbf{u} \in H$. (Her er som vanlig $\|\cdot\|$ normen generert av indreproduktet $\langle \cdot, \cdot \rangle$, dvs. $\|\mathbf{u}\| = (\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle)^{\frac{1}{2}}$.)

d) Vis at A er uniformt kontinuerlig.

e) La $\beta_i = A(\mathbf{e}_i)$ og vis at $A(\sum_{i=1}^{n} \beta_i \mathbf{e}_i) = \sum_{i=1}^{n} \beta_i^2$ for alle $n \in \mathbb{N}$. Bruk dette til å vise at $\left(\sum_{i=1}^{\infty} \beta_i^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq M$.

f) Vis at rekken $\sum_{i=1}^{\infty} \beta_i \mathbf{e}_i$ konvergerer i H.

g) La $\mathbf{y} = \sum_{i=1}^{\infty} \beta_i \mathbf{e}_i$. Vis at $A(\mathbf{x}) = \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$ for alle $\mathbf{x} \in H$.

SLUTT