Cantors mengde og andre paradokser

På disse få sidene vil jeg presentere enkelte fenomener fra teorien for relle funksjoner av en variabel. De er alle eksempel langt fra den strake landevei, og illustrer hva som faktisk kan skje. Man kunne være fristet til å kalle eksemplene for patologier, et standpunkt som imidlertid ville være utrykk for en alt for smal horisont.

Vi skal innom tre grupper av eksempler. For det første *Cantormengden*, og den skal vi bruke mest tid på. Det er en overtellbar mengde av mål null.

Denne berømte mengden hjemme i et hvert kurs i målteori, eller for den saks skyld, også andre kurs som behandler undermengder av reelle tallene. Den ble beskrevet av Georg Cantor i 1881, imidlertdig skal både H. J. S. Smith og Vito Volterra vært innom mengden i sine arbeider, henholdsvis i 1875 og 1881.

Cantormengden er en blant en rekke lignende mengder hvis egenskaper utfordrer vår intuisjon og illustrerer uventede fenomer. Om ikke annet er de en viktig motivasjon for å gi formell, vanntette beviser også for setninger som kan synes opplagte! Man vet aldri om det lurer et paradoks rundt hjørnet!

Ved hjelp av Cantormengden kan man komstruere en kontinuerlig funksjon på $[0, 1]$ som vokser (dog ikke strengt) fra 0 til 1, men som er deriverbar med deriverert er lik null nesten overalt (det vil si på en mengde hvis komplement er av mål null).

Vi skal også gi eksempel på såkalte *fete Cantormengder*. De har alle Cantormengdens topologiske egenskaper, men er ikke lenger av mål null. Ved hjelp av slike fete mengder, skal vi så lage en funksjon som er deriverbar i $[0, 1]$, men hvis derivert *ikke* er Riemann-integrerbar! Det må være en god motivasjon for å innføre Lebesque-integralet.

Tilslutt skal vi gi eksemplet på en undermengde av $[0, 1]$ som *ikke* er målbar.

En kanskje mer vitenskapelig motivasjon enn den pedagogiske vi ga ovenfor er følgende: Om ikke undermengder av intervallet $[0, 1]$ og kontinuerlige funksjoner på det samme intervallet skulle være av primær og basal interesse i matematikken, hva da? Det synes opplagt at dette er studieobjekter av første rang.

Dessuten har Cantormengdenen og alle dxens fettere og kusiner en rekke anvendelser — både i matematikk, statistikk og fysikk.

Cantormengden

KONSTRUKSJON AV CANTORS MENGDE Så til Cantormengden. Vi starter med å definere en nedstigende følge av undermengder C_n av intervallet $[0, 1]$. Hverav disse er en union av endelig mange lukkede intervaller; for å være presis er de unionen av 2^n

intervaller.

Definisjonen av undermengdene C_n er rekursiv. Vi begynner med å la $C_0 = [0, 1]$. For å danne C_1 fra C_0 deler vi C_0 i tre like lange intervaller og fjerner det åpne, midterse intervallet. Det betyr at $C_1 = [0, 1/3] \cup [2/3,]$, og det vi fjerner, er intervallet $(1/3, 2/3)$:

Om nå C_n er konstruert, lager vi C_{n+1} på en tilsvarende måte. Hvert av delintervallene i C_n deler vi i tre like deler, og så kaster vi vekk det åpne, midterste intervallet. For eksempel blir $C_2 = [0, 1/9] \cup [2/9, 3/9] \cup [6/9, 7/9] \cup [8/9, 9/9]$:

På denne måten konstruerer vi en nedstigende kjede av lukkede mengder C_n, og vi lar *Cantormengden*, som vi skal betegne med $\mathcal{C}$, være snittet av dem; altså

$$\mathcal{C} = \bigcap_{\nu \geq 0} C_\nu.$$

Cantormengden er av mål null. I hvert av de rekursive skrittene i konstruksjonen av Cantormengden — der vi dannet C_n fra C_{n-1} — fordoblet vi antall delintervaller. Vi delte jo hvert delintervall ti C_{n-1} i tre og kastet bort et av dem. Ved induksjon følger det at C_n består av 2^n delintervaller. De er alle lukkede, siden intervallene vi fjerner er åpne. Hvert av dem har en lengde som er en tredjedel av lengden til de foregående, og det betyr at alle delintevallene til C_n er av lengde 3^{-n}. Vi oppsummerer dette i følgende lemma:

Lemma 1 *i) Mengdene C_n er alle lukkede, og de danner en nedstigende kjede; det vil si at $C_{n+1} \subseteq C_n$.*

ii) Mengden C_n består av 2^n parvis disjunkte, lukkede intervaller som hvert er av lengde 3^{-n}.

iii) Målet av C_n er gitt ved $\mu C_n = (2/3)^n$.

Det er klart at $\mathcal{C}$ er lukket (snitt av lukkede er lukket), og siden målet av en nedstigende kjede av målbare mengder er lik grensen for målet av mengdene, finner vi:

$$\mu\mathcal{C} = \mu(\bigcap_{n \geq 1} C_n) = \lim_{n \to \infty} \mu C_n = \lim_{n \to \infty} (2/3)^n = 0.$$

Vi har bevist:

Setning 1 *Cantormengden er av mål null.*

CANTORMENGDEN ER SELVSIMILÆR. Cantormengden har en egenskap som vi kunne omtale som å være "selvsimilær". I klartekst betyr det at hvert delintervall I i en av mengdene C_n snitter $\mathcal{C}$ i en mengde som er ekvivalent med hele Cantormengden — der vi med å si at mengdene er ekvivalente, mener at de er ekvivalente som metriske rom. Vi gjenfinner altså en kopi — riktig nok forminsket — av Cantormengden i hvert av delintervallene.

Denne selvrsimilariteten kan vises ved bruk av en ganske enkel funksjon. For å beskrive denne, lar vi I betegne et av delintervallene til C_n. Det er av lengde 3^{-n}, og det har et venstre endepunkt e og et høyre endepunkt f. Altså er $I = [e, f]$ der $f = e+3^{-n}$. Avbildningen ϕ som etablere selvrsimilariteten, er gitt på $[0, 1]$ ved $\phi(x) = e + 3^{-n}x$. Den tar opplagt verdier I, og den er invertibel, med $\psi(x) = 3^n(x - e)$ som invers.

Vi finner $|\phi(x) - \phi(y)| = 3^{-n} |x - y|$, så ϕ er nesten en isometri. Den bevarer ikke avstander, men forminsker alle avstander med den samme faktoren 3^{-n}. Deres relative størrelse bevares dermed. La oss kalle en slik avbildning for en *kvasiisometri.*

Avbildningen ϕ bevarer altså forholdet mellom størrelser. Det betyr at en tredeling av et intervall $[0, 1]$ blir gjenspeilet i en tredeling av intervallet I. Det følger lett — og burde være intutivt klart — at ϕ avbilder Cantormengden $\mathcal{C}$ på snittet $\mathcal{C} \cap I$, og at restriksjonen av ϕ til $\mathcal{C}$ er invertibel med restriksjonen av ψ til $\mathcal{C} \cap I$ som invers.

Dette betyr ar $\mathcal{C}$ og $\mathcal{C} \cap I$ er *kvasiisometriske.* De er altså ekvivalente som metriske rom og har nøyaktig de samme egenskapen, bortsett fra de rent numeriske. For eksempel har de samme kardinalitet, og de er homeomorfe. Vi har etablert følgende setning:

Setning 2 *For hvert delintervaller I er $\mathcal{C}$ og $\mathcal{C} \cap I$ ekvivalente metriske rom.*

CANTOR MENGDEN ER INGENSTEDS TETT. En undermengde $A \subseteq X$ av et metrisk rom X sies å være *ingensteds tett* — *nowhere dense* på engelsk — dersom det indre av tillukningen av X er tomt. En annen måte å si dette på er å si at tillukningen av X ikke inneholder noen åpen mengde. I vårt tilfelle, når $A \subseteq [0, 1]$ og A er lukket, betyr dette at A ikke inneholder noe intervall.

Setning 3 *Cantormengden har ingen indre punkter: i.e., den inneholder ingen intervaller.*

BEVIS. Anta at $J \subseteq [0, 1]$ er et intervall og la a være lengden av det. La n være et så stort naturlig tall at $3^{-n} < a$. Da kan J ikke være inneholdt i noen av delintervallene til C_n siden disse alle har lengde 3^{-n} som er mindre enn lengde av J. Følgelig kan ikke J ligge i $\mathcal{C} = \bigcap_{n\geq 0} C_n$. ❑

Setning 4 *Cantormengden har ingen isolerte punkter, eller sagt noe annerledes, alle dens punkter er opphopningspunkter.*

BEVIS. La $x \in \mathcal{C}$, og la I være et intervall omkring x. Vi må vise at I inneholder punkter fra $\mathcal{C}$ som er forskjellig fra x. La a være avstanden fra x til det nærmeste endepunktet til I. Velg et så stort naturlig tall n at $3^{-n} < a$. Delintervallet til C_n der x ligger, må da være inneholdt i I. Men siden $\mathcal{C}$ er selvsimilær, vet vi at det finnes uendelig mange punkter fra $\mathcal{C}$ i hvert delintervall, og og følgelig også i I. Spesielt finnes det punkter fra $\mathcal{C}$ som er forskjellig fra x der. ❑

CANTORMENGDEN ER IKKE TELLBAR Vi skal nå gi en beskrivelse av punktene i Cantormengden ved hjelp av endepunktene til delintervallene i mengdene C_n. Den vil blant annet ha som følge at Cantormengden ikke er tellbar.

La nå $x \in \mathcal{C}$. På hvert nivå — altså for hver n — vil x ligge i nøyaktig ett av delintervallene til C_n. Selvsagt må x ligge i et siden $\mathcal{C} = \bigcap_{n\geq 1} C_n$, og like selvsagt kan x bare ligge i ett siden delintervalene er disjunkte.

Vi finner således en entydig gitt nedstigende følge av delindervaller I_n slik at $x \in \bigcap_{n\geq 1} I_n$. Videre er x det eneste elementet i dette snittet; for var det et annet element der, la oss si y, ville lengden av I_n være mindre enn $|x - y|$ for n tilstrekkelig stor, og da kunne ikke I_n inneholde både x og y.

Vi konkluderer med at $\bigcap_{n\geq 1} I_n = \{x\}$. Det naturlige spørsmålet er nå om det gjelder for alle slike følger av delintervaller at snittet deres består av nøyaktig ett element? At det ikke kan ha to eller flere følger, slik vi nettopp så, av at lengden til delintervallene nærmer seg null når $n \to \infty$, men *a priori* kunne det tenkes at snittet var tomt. Imidlertid er det ikke det:

Lemma 2 *Anta at $\{I_n\}_{n=1}^{\infty}$ er en følge av intervaller som oppfyller følgende to betingelser:*

1. *I_n er et av delintevallene i C_n,*
2. *Følgen er nedstigende; i.e., $I_{n+1} \subseteq I_n$.*

Da består $\bigcap_{n\geq 1} I_n$ av nøyaktig ett element. Omvendt, om $x \in \mathcal{C}$, så finnes en entydig slik følge av intervaller hvis snitt er lik $\{x\}$.

Bevis. Vi trenger bare vise at snittet er ikketomt, resten har vi allerede bevist. For hvert intervall I_n, lar vi e_n være et av endepunktene (fritt valg). Følgen $\{e_n\}$ er en Cauchy-følge fordi $|e_n - e_m| \leq 3^{-n}$ for alle $n \geq m$ siden både e_m og e_n ligger i I_m. Det betyr at følgen $\{e_n\}$ konvergerer mot en x.

La oss sjekke at x ligger i alle intervallene I_m. La m være gitt; vi skal vise at $x \in I_m$. Dersom $e_n = e_m$ fra et visst n av, er $x = e_m$, og vi er fremme. Tilsvarende gjelder om e_n fra et visst n av er lik det andre endepunktet e'_m til I_m. Vi kan altså anta at det finnes en n slik at e_n ikke er et av de to endepunktene til I_m og så stor at $|x - e_n| < \frac{1}{2} \max\{|x - e_m|, |x - e'_m|\}$. Siden $e_n \in I_m$, følger det at $x \in I_m$. ❑

Underveis i dette beviset fortok vi flere valg av endepunkter. Vi skal se at dette valget kan standardiseres, slik at vi får en *entydig* følge av endepunkter tilordnet $x \in \mathcal{C}$. Vi sier at en følge $\{e_n\}$ er *god* dersom:

1. Hver e_n er et av endepunkene til et av delintervallene til C_n
2. For hver $n \geq 1$ er e_{n-1} og e_n endepunkt i det samme delintervallet til C_n.

I en nedstigende følge $\{I_n\}$ av delintevaller er I_n ett av to delintervaller som er oppstått ved en tredeling av I_{n-1}. Følgelig — og det er poenget — har I_n ett og bare ett felles endepunkt med I_{n-1}. Vi lar e_{n-1} være dette felles endepunktet. Da er det klart at følgen $\{e_n\}$ er en *god* endepunktsfølge.

Omvendt, til hver slik gode følge av endepunkter, kan vi lage en nedstigende følge av delintervaller. Vi lar naturligvis $I_0 = C_0$, og for $n \geq 1$, lar vi I_n være det delintervallet av C_n som har både e_{n-1} og e_n som endepunkt. Det er klart at $I_n \subseteq I_{n-1}$ siden de har et felles endepunkt.Vi har dermed vist:

Setning 5 *Det er en-en tydig korrespondanser mellom Cantormengden og følgende to mengder:*

i) Mengden av gode endepunktesfølger $\{e_n\}$.

ii) Mengden av nedstigende følger $\{I_n\}$ *av delintervaller til* C_n.

En slike følge av endepunkter eller delintervaller kan beskrives ved en serie binære valg. Naturligvis er alltid $I_0 = C_0$, og der kan vi velge e_0 på to måter; enten er e_0 lik 0, eller så er er e_0 lik 1. I det videre skal vi heller si at vi velger det venstre endepunktet — det valget betegnes med v — eller det høyre — som betegnes med h. Siden e_0 må ligge i I_1 bestemmes I_1 av dette valget. Tilsvarende, vil vi ha to muligheter for e_1. Vi kan la $e_1 = e_0$ — og da holder vi oss til venstre, og valget betegnes med vv — eller vi kan la e_0 være det andre endepunktet til I_1 — og da betegnes valget med vh.

Generelt, dersom vi har valgt $e_0, e_1, \dots, e_{n-1}$ har vi nøyaktig to muligheter for e_n. Vi tredeler jo I_{n-1}, og kaster bort midtdelen. Det betyr at e_{n-1} ligger i ett av de to nye delintervallene, og vi har valget mellom å la $e_n = e_{n-1}$ eller å la e_n være det andre endepunktet til I_n — valg som vi bokfører ved å føye henholdsvis en v eller en h til listen av v-er og h-er.

Setning 6 *Det er en-en-tydig korrespondanse mellom punkter i $\mathcal{C}$ og sekvenser $\{w_n\}_{n=1}^{\infty}$ der hver w_i enten er en v eller en h.*

BEVIS. Dette følger av hva vi nettopp sa, og korrespondansen mellom punkter i $\mathcal{C}$ og sekvenser av endepunkter fra setning 5. ❑

Som et umiddelbart korollar får vi:

Korollar 1 *Cantormengden er ikke tellbar, men har samme kardinalitet som $\mathbb{R}$.*

BEVIS. Cantors diagonalmetode — som brukes til å vise at mengden av følger av nuller og enere er overtellbar — gir dette. ❑

Vi kunne selvsagt bruke en vilkårlig mengde med to elementer i beskrivelsen ovenfor, for eksempel $A = \{0, 2\}$ som gir en "treadisk0" utvikling av tall. En annen mulighet ville vært å bruke mengden { kron , mynt }. Da ville Cantormengden vært rommet av alle mulig utfall for tellbare myntkastsekvenser.

EKSEMPEL 1. Endepunktene i delintervallene ligger alle i Camtormengden, og de tilsvarer "valgsekvenser" som til slutt stabiliserer seg med bare venstrevalg eller høyrevalg. Eller sagt anneledes, sekvenser som etterhvert kun består av v-er eller h-er. De med bare v-er i sekvensen er det minste endepunktet i et delintervall, og de med bare h-er er det største. Eksempelvis er $7/81 \in \mathcal{C}$ et endepunkt, som tilsvarer sekvensen $vhvhvhhhhh\dots$. △

SAMMENHENG MED DEN TERNÆRE UTVIKLINGEN AV TALL På samme måte som ethvert tall $x \in [0,1]$ har en desimalutvikling, har enhver x også en *ternær utvikling* eller en *tresimal utvikling* kunne man være fristet til å si. Vi kan skrive x som en uendelig sum $x = \sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu 3^{-\nu}$ der koeffisientene a_ν enten er 0, 1 eller 2. En annen måte å fremstille x på, som kanskje er mer i stil med hvordan vi vanligvis skriver desimaltall, er å skrive $x = 0.a_1a_2a_3\cdots$. Der altså "tresimalene" a_ν er blant tallene $0, 1$ og 2.

En slik fremstilling er entydig, dog med *ett* unntak. En uendelig "tresimalhale" bestående av en null etterfulgt av toere er ekvivalent med en en ener etterfulgt av en hale av bare nuller — helt i overenstemmelse med hva vi er vant til med desimaltall, nemlig at $1.000\cdots = 0.999\cdots$. For eksempel har vi likheten $0,022021000\cdots = 0.022020222\cdots$, der de to ekvivalente halene er rødfarget.

La oss vende tilbake til Cantormengden, der vi nå kan karakterisere endepunkten til delintervallene i C_n ved hjelp av deres ternære utvikling. De venstre endepunkten er på formen $x = 0.a_1a_2\cdots a_n000\cdots$, der a_ν alle enten er null eller to, mens de høyre er karakterisert ved å være på formen $x = 0.a_1a_2\cdots a_n0222\cdots$, der også a_ν alle enten er null eller to. Dette sjekker man lett ved induksjon: Hvis e er et ventstreendepunkt vil det enten bevares, eller så får det et tillegg på $3^{-(n+1)}$ som endrere halen fra $\ldots a_n000$ til $\ldots a_n10000 = \ldots a_n0222\ldots$. Om det er høyre endepunkt blir det enten bevart, eller får et fradrag på $3^{-(n+1)}$ som altså endrer halen fra $\ldots a_n0222\ldots$ til $\ldots a_n000$.

Cantormengden er grensen av følger av endepunkter, ser vi at:

Setning 7 *Cantormengden består av de tallene $x \in [0,1]$ med en ternær utvikling på formen $x = a_1a_2\cdots a_n\cdots$ der hver a_ν enten er null eller to.*

CANTORMENGDEN ER TOTALT USAMMENHENGENDE Et topologisk rom (eller et metriske rom) kalles *sammenhengende* dersom det *ikke* kan skrives som en union av to ikke-tomme disjunkte, åpne mengder. Om dette var tilfellet og $X = U_1 \cup U_2$ med $U_1 \cap U_2 = \emptyset$ og begge mengdene U og U_2 åpne, ville jo både U_1 og U_2 begge også være lukkede — siden den ene er komplementet til den andre. Defor er sammenheng ekvivalent med at det ikke finnes andre undermengder enn $\emptyset$ og X selv som både er lukkede ogåpne.

Fra vår vante forestillinsverden er f.eks $\mathbb{R}$ og $\mathbb{R}^2$ sammenhengende. Cantormengden er langti fra sammenhengende. Den er til og med det vi kaller for *totalt usammenhengende*. Det betyr at de eneste sammenhengende undermengdene den har, enten er ettpunktsmengdene eller den tomme mengden. Med andre ord, om x_1 og x_2 er to forskjellige punkter fra $\mathcal{C}$, så finnes det to disjunkte mengder U_1 og U_2 som begge er åpne og lukkede i $\mathcal{C}$ med $x_1 \in U_1$ og $x_2 \in U_2$ og slik at $U_1 \cup U_2 = X$.

La oss nå se på $\mathcal{C}$. Velg to forskjellige punkter x og y med $x < y$.

La a være avstanden mellom dem, og velg n så stor at $3^{-n} < a$. Da kan ikke x og y ligge i samme delintervall til C_n (de kan ikke begge ligge i noe intervall av lengde 3^{-n}). Derfor finnes en $z \notin C_n$ med $x < z < y$.

Vi lar $U = (\infty, z] \cap \mathcal{C}$ og $V = \mathcal{C} \cap [z, \infty)$. Det er da to disjunkte mengder som både er åpne og lukkede i $\mathcal{C}$. Mengden U er lukket i $\mathcal{C}$ siden den er snittet av $\mathcal{C}$ med en lukket mengde, og at den er åpen, følger siden U også er lik $(\infty, z) \cap \mathcal{C}$ siden z ikke ligger i $\mathcal{C}$. Tilsvarenede gjelder for V.

Mengdene U og V er disjunkte (siden $z \notin \mathcal{C}$) og deres union er lik hele $\mathcal{C}$ (siden allerede C_n er inneholdt i unionen). Dette viser at Cantormengden er totalt usammenhengende.

Djeveltrappen

Alfred Hitchcocks klassiske filmgrøsser "The Thirty-Nine steps" fra 1935 er ingen ting imot Cantors *djeveltrapp* med sitt overtellbart antall trinn! Den er en riktig grøsser i funksjonenes verden: En kontinuerlig funksjon på $[0, 1]$ som vokser fra 0 til 1, men som allikevel nesten over alt har en derivert som er lik null !

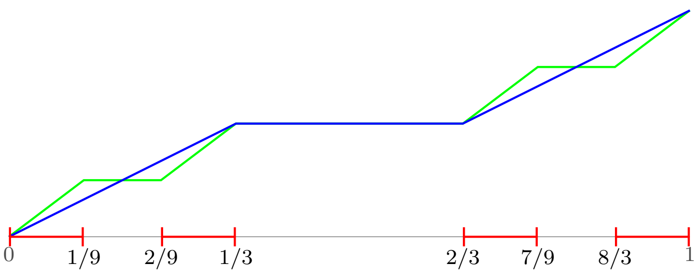
Djeveltrappfunksjonen kan selvsagt ikke være deriverbar over alt, og det er nettopp på Cantormengen dens deriverte ikke eksisterer. Det er der funksjonen vokser, går fra trinn til trinn for å holde oss til trappeanalogien. Imotsetning til en Hitchcock-film — som det formodentlig ligger mye arbeid bak — er djeveltrappen ikke voldsomt arbeidskrevende å lage, særlig ikke når vi allerede har konstruert Cantormengden.

Vi starter med å la χ_n betegne den karakteristiske funksjonen til mengden C_n. Den tilfredstiller $\chi_n(x) = 1$ når $x \in C_n$ og $\chi_n(x) = 0$ når $x \notin C_n$.

Vi lar så $g_n = (3/2)^n \chi_n$. Det er en funksjon som er konstant på C_n med verdien $(3/2)^n$, og som er identisk lik null utenfor. Vi integrerer g_n og lar

$$f_n(x) = \int_0^x g_n(t)\, dt.$$

Disse funksjonenen er alle stykkevis lineær funksjon. I hvert av delintervallene til C_n vokser de med stigningskoeffisient lik $(3/2)^n$, så de blir brattere og brattere jo større n bli, mens utenfor C_n er de konstante — se figur 1, der vi har tegnet to suksessive slik funsksjoner.



Figur 1: To av funskjonene f_n og f_{n+1} som konverger mot djeveltrappen.

Når x gjennom løper et av delintervallene til C_n, la oss kalle det I, får funksjonsverdien til f_n en viss økning. Siden stigningskoeffisienten er $(3/2)^n$, og lengden av delintervallet er 3^{-n}, blir økningen $(3/2)^n \cdot 3^{-n} = 2^{-n}$.

Vi ser nå på f_{n+1} over det samme delintervallet. Mengden C_{n+1} har to delintervaller inneholdt i I. Over det første vokser f_{n+1} med $2^{-(n+1)}$, den er konstant i intervallet mellom de to delintervallene for så igjen å vokse med $2^{-(n+1)}$ over det andre delintervallet. Totalt vokser altså f_{n+1} med $2 \cdot 2^{-(n+1)} = 2^{-n}$ over intervallet I, og det er den samme veksten som f_n har. Det betyr at om f_n og f_{n+1} tar samme verdi i det venstre endepunktet til I, tar de også samme verdi i det høyre.

Siden $f_n(0) = f_{n+1}(0) = 0$ følger det ved en enkel induksjon at $f_n(e) = f_{n+1}(e)$ for alle endepunktene til C_{n+1}. Dermed har vi

Lemma 3 *Dersom $m \geq n$ så er $f_n(x) = f_m(x)$ for alle $x \notin C_m$, spesielt gjelder dette for alle $x \notin \mathcal{C}$.*

Videre skal vi vise:

Lemma 4 *Vi har*

$$|f_{n+1}(x) - f_n(x)| < 2^{-n}$$

for alle $x \in [0,1]$.

BEVIS. For å etablere dette ser vi på ulikheten

$$(\frac{3}{2})^{n+1}t - (\frac{3}{2})^n t = (\frac{3}{2})^n t \leq (\frac{1}{2})^n,$$

som er gyldig for $0 \leq t \leq (\frac{1}{3})^n$. Om I er et av delintervallene til C_n med venstre endepunkt e, så er $f_n(x) = (\frac{3}{2})^n(x-e)$ når $x \in I$, mens $f_{n+1}(x) \leq (\frac{3}{2})^{n+1}(x-e)$ med likhet når x ligger i den venstre tredjedelen av I. Lemmaet følger da av ulikheten ovenfor siden lengden av I er lik $(\frac{1}{3})^n$. ❏

Det vanlige trikset med en telskoperende sum og en geometrisk rekke gir oss at $\{f_n(x)\}$ er uniformt Cauchy:

$$|f_m(x) - f_n(x)| \leq \sum_{i=n}^{m} 2^{-i} \leq 2^{-(n-1)}.$$

Det betyr at følgen $\{f_n\}$ kovegerer uniformt — og grensefunksjonen er nettopp djeveltrappen! Vi betegner den med f.

Som integraler av begrensede funksjoner er $f_n(x)$ alle kontinuerlige, og siden $\{f_n\}$ konvergerer uniformt, er f er kontinuerlig. Videre er f konstant over hvert av delintervallene til *komplementet* til Cantormengden, og følgelig er f deriverbar der med derivert lik null. Vi har:

Setning 8 *Funksjonen* $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ *er kontinuerlig og monoton i* $[0, 1]$*, den vokser fra* 0 *til* 1*, men dens deriverte er* 0 *nesten over alt.*

Fete Cantormengder

Hovedelementet i Cantors konstruksjon er hva man kunne kalle en *sukssesiv trichotomi* — eller en *gjentatt tredeling* på godt norsk — av et intervall. I den konstruksjonen ble intervallene hele tiden delt i tre like store deler, men man kan jo tenke seg endre forhold mellom delene. Hvis intervallene som kastes vekk blir kortere og kortere i forhold til delintervallene de kastes vekk fra, kan man oppnå *fete* Cantormengder. Det er mengder med Cantormengdens topologiske egenskaper, men som er av positivt mål.

Vi skal i det følgende konstruere slike fete Cantormengder med med mål så nær oppunder én vi vil. De vil altså "målmessig" utgjøre en så stor del av $[0, 1]$ som vi måtte ønske, men de vil fortsatt ha Cantormengdens topologiske egenskaper, for eksempel vil de være ingensteds tette.

Konstruksjonen er nærmest en kopi av konstruksjonen av Cantormengden, men vi skal som sagt, kaste vekk mindre og minder deler av intervallene. I konstruksjonen er det en parameter λ, et reelt tall med $\lambda > 2$.

Som med Cantormengden tar vi utgangspunkt i $C_0 = [0, 1]$, og vi lar D_1 være det åpne intervallet i C_0 som er symmetrisk om midten av C_0, og som har lengde $\frac{1}{\lambda}$, *i.e.*, $D_1 = (1/2 - 1/2\lambda, 1/2 + 1/2\lambda)$. Vi setter $C_1 = C_0 \setminus D_1$. Da har D_1 to delintervaller, og neste skritt i prosessen er å kaste vekk fra hvert av dem et åpent intervall, symmetrisk om midtpunkte deres, men denne gang av lengde $1/2\lambda^2$, og la C_2 være det gjenstående. Det er en union av *fire* lukkede intervaller.

I det rekursive steget antar vi at C_n er konstruert og har 2^n delintervaller. Fra hvert av dem fjerner vi et åpent delintervall, symmetrisk om midten, og av lengde $2^{-n}\lambda^{-(n+1)}$, og vi lar C_{n+1} være unionen av alle intervallene som står igjen. At C_{n+1} har 2^{n+1} delintervaller er klart. Strengt tatt må vi argumentere for at det er plass nok til å fjerne slike intervaller, men når det gikk bra å fjerne en tredjedel i hvert steg slik vi gjorde da vi konstruerte Cantormengden, går det også bra å fjerne mindre.

Vi lar den generaliserte Cantormengden $\mathcal{C}_\lambda$ være definert ved:

$$\mathcal{C}_\lambda = \bigcap_{n=0}^{\infty} C_n.$$

Vi skal vise følgende:

Setning 9 $\mathcal{C}_\lambda$ *er en lukket, og ingensteds tett undermengde av* $[0, 1]$*. Den er en fet*

Cantormengde av mål gitt ved

$$\mu(\mathcal{C}_\lambda) = \frac{\lambda - 2}{\lambda - 1}.$$

Før beviset bemerker vi at $\frac{\lambda-2}{\lambda-1}$ går mot 1 når $\lambda \to \infty$, så denne konstruksjonen gir fete Cantormengder av mål vilkårlig nær 1.

BEVIS. Vi beregner målet av mengden vi har fjernet, altså av komplementet $\mathcal{C}_\lambda^c$ til den generaliserte Cantormengden. Denne er lik $\bigcup_{n=1}^{\infty} C_n^c$ der unionen er disjunkt. Da vi laget C_{n+1} fra C_n, fjernet vi et intervall av lengde $2^{-n}\lambda^{-(n+1)}$ fra hvert av de 2^n delintervallene til C_n. Til sammen har disse intervallene mål $2^n \cdot 2^{-n}\lambda^{-(n+1)} = \lambda^{-(n+1)}$. Summerer vi dette over alle n, finner vi

$$\mu(\mathcal{C}_\lambda^c) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^{-(n+1)} = \lambda^{-1}(1 - \lambda^{-1})^{-1} = (\lambda - 1)^{-1},$$

som gir setningen siden $\mu(\mathcal{C}_\lambda) = 1 - \mu({\mathcal{C}_\lambda}^c)$. ❑

EN DERIVERBAR FUNKSJON HVIS DERIVERT IKKE ER INTEGRERBAR. Kostruksjonen av denne funksjonen ble gjort av den italienske matematikeren Vito Volterra i 1881. Den baserer seg på to ting. Det ene er de fete Cantormengden vi nettopp konstruerte, og det andre er funksjonen

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & \text{om } x \neq 0 \\ 0 & \text{om } x = 0. \end{cases}$$

Denne er deriverbare over alt, også i origo, der den deriverte er null— det ser man lett siden $(f(h) - f(0))h^{-1} = h \sin \frac{1}{h}$ som går mot null med h. Derimot er den ikke kontinuerlig deriverbar i origo, fordi grensen av den deriverete — som er $2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}$ — ikke eksisterer.

La nå $J = [a, b]$ være er et intervall. Vi skal tilpasse $f(x)$ til J.

Vi lar to funksjoner være definert ved $f_1(x) = f(x - a)$ og $f_2(x) = f(b - x)$. Det betyr at vi har flyttet det singulære punktet respektivt til a og til b, og for f_2's vedkommende, har vi for forskyvningen speilet f gjenom $y - aksen$.

Funksjonen $f(x)$ har et tellbart uendelig antall maksimumspunkter. De danner en følge som konvegerer mot origo. Det samme gjelder da f_1, med unntak av at maksimumspunktene hoper seg opp mot a. Velg ett av dem — kall det ξ — som ligger nærmere a en $(b - a)/2$; det vil si at det ligger i venstre halvdelen av intervallet $[a, b]$. Da vil $\xi' = b - a + \xi$ ligge symmetrisk til ξ om midtpunktet til $[a, b]$. Siden f_2 er fremkommet ved å speile f gjennom y-aksen også forskyve origo til b, vil ξ' være maksimumspunkt for f_2, og $f_2(\xi') = f_1(\xi)$.

Vi lar nå

$$f_J(x) = \begin{cases} f_1(x) & a \leq x \leq \xi \\ f_1(\xi) & \xi < x < \xi' \\ f_2(x) & \xi' < x \leq b \\ 0 & \text{for alle andre verdier av } x \end{cases}$$

Vi har altså "kappet" f_1 ved ξ og f_2 ved ξ' og lagt en "horisontal bro" mellom de to maksimumspunktene. Da er f_J deriverbar overalt. I punktene ξ og ξ' fordi både den "horisontale broen" og f_1 respektive f_2 har derivert null i disse punkten, i endepunktene til J fordi — til syvende og sist — f er deriverbar i origo, mens i alle andre punkter er det opplagt.

direkte av definisjonen av f_J og av at $|\sin x| < 1$

Lemma 5 *La $x \in [0,1]$ og la $\delta_J(x)$ betegne avstanden fra x til det nærmeste endepunktet til intervallet J. Da gjelder det at*

$$|f_J(x)| \leq \delta_J(x)^2$$

Vi lar nå $\mathcal{I}$ betegne mengden som består av alle de delintervallene vi *fjernet* da vi konstruerte den fete Cantormengden $\mathcal{C}$. Funksjonen vi er på jakt etter er gitt ved

$$F(x) = \sum_{I \in \mathcal{I}} f_I.$$

Intervallene fra $\mathcal{I}$ er parvis disjunkte, så for hver $x \in [0,1]$ er det maksimalt ett av leddene i summen som ikke forsvinner i x. Ligger x i $\mathcal{C}$, forsvinner alle leddene der, og $F(x) = 0$. Er derimot x inneholdt i et intervall I blant dem vi kastet vekk, er $F(x) = f_I(x)$. Vi sjekket ovenfor at f_I var deriverbar, og det betyr at F er deriverbar i alle punkten i $\bigcup_{I \in \mathcal{I}} I$. Den er altså deriverbar *utenfor* den fete Cantormengden. Vi skal vise følgende:

Setning 10 *F er deriverbar over alt. Om $x \in \mathcal{C}$, så er $F'(x) = 0$ og F' er ikke kontinuerlig i x.*

La $x \in \mathcal{C}$, det er der problemene er. Vi så at $F(x) = 0$, så differentialkvotienten til F i x blir:

$$\frac{F(x+h)-F(x)}{h} = \frac{F(x+h)}{h} = \begin{cases} f_I(x+h)/h & \text{om } x+h \in I \text{ for en } \ I \in \mathcal{I} \\ 0 & x+h \in \mathcal{C} \end{cases}$$

Anta at $x+h \in I = [a,b]$, og la $k = \delta_I(x+h)$. Da er $|h| \geq k$ siden x ikke ligger i I, og etter lemma 5 ovenfor finner vi:

$$\left| \frac{F(x+h)-F(x)}{h} \right| \leq |f_I(x+h)/h| \leq \delta_I(x+h)^2/\,|h| = k^2/h \leq |h|$$

som viser at F er deriverbar med derivert lik 0 i x.

At F' ikke er kontinuerlig i x følger av at enhver omegn om x innholder intervaller fra $\mathcal{I}$, og i slike tar F' verdiene ± 1 (uendelig mange ganger).

Setning 11 *Volterra-funksjonen F er deriverbar over alt, men dens deriverte er ikke Riemann-integrerbar.*

BEVIS. Vi har sett at F' eksiterer over alt, og at den er diskontinuerlig i alle punktene i en fet Cantor mengde; som altså er av mål ekte større enn null. Nå er det slik at en funksjon er Riemann-intergrerbar hvis og bare hvis den er kontinuerlig nesten over alt; det vil si at mengden av dens diskontinuitetspunkter er av mål null. Det følger av dette at F' *ikke* er Riemann-integrerbar. ❏

En mengde som ikke er Lebesgue-målbar

Det finnes et klassisk eksempel på en ikke målbar undermengde av $\mathbb{R}$ som blir presentert i de fleste lærebøker i målteori — så, altså, nå også her!

Eksemplet baserer seg på en oppdeling av de reelle tallene ved hjelp av translater av de rasjonale tallene. Vi lar $Q_x = x + \mathbb{Q}$ for $x \in \mathbb{R}$; *i.e.*, $Q_x = \{x+q : q \in \mathbb{Q}\}$. Disse mengdene danner en *partisjon* eller en *oppdeling* av $\mathbb{R}$, som vi burde si på norsk. Det betyr at unionen av dem er lik $\mathbb{R}$ (som er opplagt siden $x \in Q_x$), og at to av dem enten er like eller disjunkte. Altså:

Lemma 6 *La $x, y \in \mathbb{R}$. Dersom $Q_x \cap Q_y \neq \emptyset$, så er $Q_x = Q_y$.*

BEVIS. Anta at $z \in Q_x \cap Q_y$. Da kan vi skrive $z = x+q = y+r$ der q og r er rasjonale tall. Det betyr at for et hvert rasjonalt tall s, så er $x+s = y+r-q+s \in Q_y$ siden summen av rasjonale tall er rasjonal. Vi har dermed vist at $Q_x \subseteq Q_y$. Ved symmetri finner vi $Q_x = Q_y$. ❑

Vi lar $\mathcal{P}$ betegene mengden av disse translatene. Med andre ord er $\mathcal{P} = \{Q_x : x \in \mathbb{R}\}$. For hvert element $P \in \mathcal{P}$ velger [1] vi en $a_P \in P$, og siden vi kan addere rasjonale tall til a_P uten å forlate P, kan vi passe på å velge a_P slik at $a_P \in [0,1]$. Vi lar $A = \{a_P : P \in \mathcal{P}\}$, og vi skal vise at A ikke er målbar. Anta fra nå av at A *er* målbar; det skal vise seg at det fører til en motsigelse.

Lemma 7 *Dersom q og r er to rasjonale tall, og $A + q \cap A + r \neq \emptyset$, så er $q = r$.*

BEVIS. Et element z som ligger både i $A + q$ og i $A + r$ kan skrives som $z = a_P + q = a_{P'} + r$. Men da er $a_P = a_{P'} + r - q \in P'$, som ikke er tilfelle når $a_P \neq a_{P'}$, siden de forskjellige a_P-ene ble plukket fra forskjellige P-er. Derfor er $a_P = a_{P'}$, og følgelig $q = r$. ❑

Den mengden vi skal bruke til å få en motsigelse er følgende:

$$E = \bigcup_{q \in [-1,1] \cap \mathbb{Q}} A + q.$$

Siden translater av målbare mengder er målbare, følger det at E er målbar dersom A er det, og etter lemma 7 ovenfor er unionen disjunkt. Da gir additivitet til Lebesgue-målet oss at

$$\mu(E) = \sum_{q \in [-1,1] \cap \mathbb{Q}} \mu(A + q) = \sum_{q \in [-1,1] \cap \mathbb{Q}} \mu(A),$$

siden μ er translasjonsinvariant. Summen tilhøyre er en tellbart uendelig sum med alle addender like. For at det skal gi mening, må enten alle addendene være null — og altså $\mu(E) = 0$ — eller så er $\mu(E) = \infty$.

Men nå er $E \subseteq [-1,2]$ (siden $0 \leq a \leq 1$ og $-1 \leq q \leq 1$ gir $-1 \leq a + q \leq 2$) og det er klart at $[0,1] \subseteq E$ (siden $0 \leq a, a' \leq 1$ gir $-1 \leq q \leq 1$ der $q = a - a'$). Derfor er $1 \leq \mu(E) \leq 3$, og det gir oss motsigelsen vi trenger. Konklusjonen er at A ikke er målbar.

Versjon: Monday, May 14, 2012 11:52:55 AM

[1] Her bruker vi det såkalte *utvalgs aksiomet* fra mengdelæren.