Om Ytremål

Vi minner om at en *boks* i $\mathbb{R}^d$ er en undermengde på formen $B = I_1 \times I_2 \times \ldots \times I_d$ der hver I_k er et intervall. Hvis $d = 1$ er en "boks" ikke noe annet enn et intervall, er $d = 2$ er det et rektangel og, om $d = 3$, ville vi kalle det et rettvinklet prisme.

Intervallene kan være åpne, lukkede eller halvåpne, og de kan være endelige og uendelige. Dersom alle er åpne sier vi at boksen er *åpen*. Er de alle lukkede, er boksen *lukket*. Vi sier at boksen er *endelig* dersom alle intervallene som inngår er endelige, og i motsatt fall, det vil si dersom et av dem er uendelig, kaller vi boksen naturlig nok *uendelig*.

Lengden til et intervall betegner vi med $|I|$. Lengden er uendelig hvis intervallet I er uendelig, og dersom intervallet er endelig og har endepunktene a og b, med $a < b$, er $|I| = b - a$ — dette uavhengig om intervallet er åpnet, lukket eller halvåpent.

Innholdet til en boks $B = I_1 \times \ldots \times I_d$ definerer vi som $|B| = \prod_{k=1}^{d} |I_k|$. Når boksen er endelig og intervallene som inngår i B har endepunkter a_k og b_k med $a_k \leq b_k$, finner vi $|B| = \prod_{k=1}^{d}(b_k - a_k)$. Dersom et av intervallene som inngår i boksen er uendelig, blir $|B| = \infty$.

I tilfellet $d = 1$ er innholdet ikke noe annen lengden av et intervall, for $d = 2$ får vi flateinnholdet av et rektangel, og for $d = 3$ rominnholdet av et prisme.

Det er en viss tvetydighet ute å går i vår definisjon av innhold, og vi burde egentlig snakket om det d-dimensjonale innholdet, men det blir språklig for tungt. Vi aksepterer at et rektangel kan kalles en (riktignok degenerert) boks i $\mathbb{R}^3$, med et av de definerede intervallene redusert til ett punkt, men volum er jo null.

NOE NOTASJON. For forhåpentigvis å ungå at poengene i hva vi gjør, forsvinner i notasjonsmessig kompleksitet, innførere vi nå noe ny notasjon for å beskrive bokser. Om $B \subseteq \mathbb{R}^d$ er en boks, skriver vi $B = I_B \times D_B$ der I_B et intervall og $D \subseteq \mathbb{R}^{d-1}$ er en boks, som altså er av en dimensjon lavere enn B. Dersom $B = I_1 \times I_2 \times \ldots \times I_d$, er $I_B = I_1$ og $D_B = I_2 \times \ldots \times I_d$. Endepunktene til intervallet I_B skal vi betegne med a_B og b_B. De kan også ta verdiene $\pm\infty$. Om I_B er endelig og lukket, er $I_B = [a_B, b_B]$.

YTREMÅLET. La nå $E \in \mathbb{R}^d$ være en vilkårlig mengde. Med en *overdekning* av E forstår vi en tellbar eller endelig familie $\mathcal{A}$ av åpne bokser slik at $E \subseteq \bigcup_{C \in \mathcal{A}} C$. *Ytremålet* til undermengden $E \subseteq \mathbb{R}^d$ definerer vi på følgende måte:

$$\mu^* E = \inf\{\sum_{C \in \mathcal{A}} |C| : \mathcal{A} \text{ overdekning av } E\}$$

Ytremålet tar verdier i mengden av ikke-negative reelle tall utvidet med uendelig; vi har altså $\mu^* E \in \overline{\mathbb{R}}^+ = \{x \geq 0 : x \in \mathbb{R}\} \cup \{\infty\}$.

Verdien av $\mu^* E$ kan gjerne være uendelig, hvilket skjer for eksempel for uendelige intervaller. Men den kan også være null. Det skjer for eksempel for mengder bestående av et punkt — mengden $\{x\} \subseteq \mathbb{R}$ kan dekkes av intervallene $(x - \frac{1}{n}, x + \frac{1}{n})$. Mer interessant er kanskje at også enhver tellbar mengde er av mål null:

Lemma 1 *Hvis $E \subseteq \mathbb{R}^d$ er en tellbar mengde, så er $\mu^* E = 0$.*

BEVIS. Vi gir beviset for tilfellet $d = 1$; så vi antar at $E \subseteq \mathbb{R}$. La $\{x_n\}$ være en oppramsing av elementene i E. Vi skal legge små åpne intervaller rundt hver x_n slik at summen av lengdene deres kan gjøres så liten vi bare vil. Vi lar N være (et stort) naturlig tall og definerer $I_n = (x_n - 2^{-N-n}, x_n + 2^{-N-n})$. Da er

$$\sum_{n=1}^{\infty} |I_n| = \sum_{n=1}^{\infty} 2 \cdot 2^{-N-n} = 2^{-N+1} \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} = 2^{-N+1}.$$

Lar vi nå $N \to \infty$, vil summen nærme seg null. ❑

Det er å merke seg at vi faktisk har tellbare mengder som er tette i hele $\mathbb{R}$ — de rasjonale tallene for eksempel — og disse har alle ytremål null! Det er også å bemerke at dette gir at den tomme mengden har ytremål null.

Setning 1 *La $\mathbb{R}^{d-1} \subseteq \mathbb{R}^d$ være gitt ved at en av koordinatene er null. Da er $\mu^* \mathbb{R}^{d-1} = 0$.*

BEVIS. Vi an klart anta at det er førstekoordinaten som er null; *i.e.*, $\mathbb{R}^{d-1} = \{(0, x_2, \ldots, x_d) : x_i \in \mathbb{R}\}$

Vi skal lage en boksoverdekning av $\mathbb{R}^{d-1}$ med vilkårlig lite innhold, så la $\epsilon > 0$ være gitt. For hvert natutlige tall n definerer vi et stort og et lite intervall. Det store er $I_n = (-n/2, n/2)$ og det lille er $J_n = (-\epsilon 2^{-n-1} n^{-(d-1)}, \epsilon 2^{-n-1} n^{-(d-1)})$. Vi lar så $B_n = J_n \times I_n \times \ldots \times I_n$. Da er $\mathcal{A} = \{B_n : n \in \mathbb{N}\}$ en overdekning av $\mathbb{R}^{d-1}$, og vi har

$$|\mathcal{A}| = \sum_{n=1}^{\infty} |J_n| \, |I_n|^{d-1} = \sum_{n=1}^{\infty} \epsilon \cdot 2^{-n} n^{-(d-1)} n^{d-1} = \epsilon$$

som vi kan få så liten vil vil. ❑

Denne setningnen kombinert med monotoniteten av ytremålet gir umiddelbart følgende korollar:

Korollar 1 *Dersom $A \subseteq \mathbb{R}^{d-1}$, så er $\mu^* A = 0$.*

En mer prosaisk egenskap ytremålet har er:

Setning 2 *Dersom $B \subseteq \mathbb{R}^d$ er en boks, så er $\mu^* B = |B|$.*

Dette er selvsagt en viktig egenskap ved ytremålet — om ikke målteorien vår ga riktig resultat for lengden av et intervall eller arealet av et rektangel, ville vi vært på ville veier. Men påstanden krever allikevel et formelt bevis, og det viser seg faktisk å være ganske kronglete. Men før vi går løs på det, la oss etablere tre andre fundamentale egenskaper som ytremålet har, og som er mindre krevende å bevise:

Setning 3 *Det følgende gjelder for ytremålet i $\mathbb{R}^d$:*

i) ***Monotonitet***: *Dersom $E \subseteq E'$ er to undermengder av $\mathbb{R}^d$, så er $\mu^* E \leq \mu^* E'$.*

ii) ***Semiadditivitet:*** *Dersom $\{E_i\}_{i=1}^{\infty}$ er en tellbar følge av undermengder av $\mathbb{R}^d$, så er*
$$\mu^*(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu^* E_i.$$

iii) ***Translasjonsinvarians***: *Om $E \subseteq \mathbb{R}^d$ er en undermengde og $a \in \mathbb{R}^d$ er et punkt, så er $\mu^*(E + a) = \mu^* E$ der $E + a = \{x + a : x \in E\}$.*

En kommentar er at ii) også gjelder for endelige unioner, noe som formelt følger ved å sette $E_i = \emptyset$ for $i > n$. Da gir ii) at $\mu^*(\bigcup_{i=1}^{n} E_i) \leq \sum_{i=1}^{n} \mu^* E_i$.

Bevis. Dersom $\mathcal{A}$ er en overdekning av E' er den også en overdekning av E siden $E \subseteq E'$. Derfor er
$$\mu^* E = \inf\{\sum_{C \in \mathcal{A}} |C| : \mathcal{A} \text{ dekker } E\} \leq \inf\{\sum_{C \in \mathcal{A}} |C| : \mathcal{A} \text{ dekker } E'\} = \mu^* E',$$
siden vi til venstre tar infimum over en større mengde.

La oss så vise semiaddiditivitet. For hver n lar vi $\mathcal{A}_n$ være en overdekning av E_n slik at $\sum_{C \in \mathcal{A}_n} |C| < \mu^* E_n + \epsilon/2^n$, der ϵ er et vilkårlig positivt tall. Da er $\bigcup_n \mathcal{A}_n$ en overdekning av $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$, og derfor er
$$\mu^*(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n) \leq \sum_n \sum_{C \in \mathcal{A}_n} |C| < \sum_n (\mu^* E_n + \epsilon/2^n) \leq \sum_n \mu^* E_n + \epsilon$$
og siden ϵ er vilkårlig, er vi fremme.

Dersom $I = (a, b)$ er et intervall og $t \in \mathbb{R}$, så er $I + t = (a + t, b + t)$, og det er klart at I og $I + t$ har samme lengde. Det følger at om B er en boks, så er $B + x$ en boks og $|B| = |(B + x)|$. Dette betyr at for enhver overdekning $\mathcal{A}$ av E så vil $\mathcal{A}' = \{B + x : B \in \mathcal{A}\}$ være en overdekning av $E + x$ og $\sum_{B\in\mathcal{A}} |B| = \sum_{B\in\mathcal{A}'} |B|$. Det følger at $\mu^* E' \leq \mu^* E$. Ved symmetri får vi likheten i setningen. ❏

BEVIS FOR SETNING 2 Vi går så løs på det kronglete beviset, og vi skal behandle de to ulikheten $\mu^* B \geq |B|$ og $\mu^* B \leq |B|$ hver for seg. Vi starter med den siste, som er enklest å etablere:

Lemma 2 *For enhver boks $B \subseteq \mathbb{R}^d$ er $\mu^* B \leq |B|$.*

BEVIS. Om $|B| = \infty$ er lemmaet opplagt, så vi kan trygt anta at B er en endelig boks. Enhver åpen boks C som inneholder B utgjør alene en overdekning av B, og følgelig er $\mu^* B \leq |C|$.

Videre er enhver boks B inneholdt i en åpen boks hvis innhold bare er "epsilon" større enn inneholdet av B. Om $B = I_1 \times \ldots \times I_d$, utvider vi hvert av intervallene som inngår, med en ϵ i hver ende, og setter altså $I'_k = (a_k - \epsilon, b_k + \epsilon)$ der a_k og b_k er endepunktene til I_k. Boksen $B' = I'_1 \times \ldots \times I'_d$ er da åpen og inneholder B, og den har innhold:

$$|B'| = \prod_{k=1}^{d} (|I_k| + 2\epsilon) \geq |B| + M\epsilon$$

der M er et positivt tall som bare avhenger av boksen B. Siden ϵ er vilkårlig, følger lemmaet. ❏

La oss nå gå løs på den andre ulikheten:

Lemma 3 *For enhver boks $B \subseteq \mathbb{R}^d$ har vi $\mu^* B \geq |B|$.*

BEVIS. Om vi kan vise at *enhver* overdekning $\mathcal{A}$ av B bestående av åpne bokser tilfredstiller ulikheten

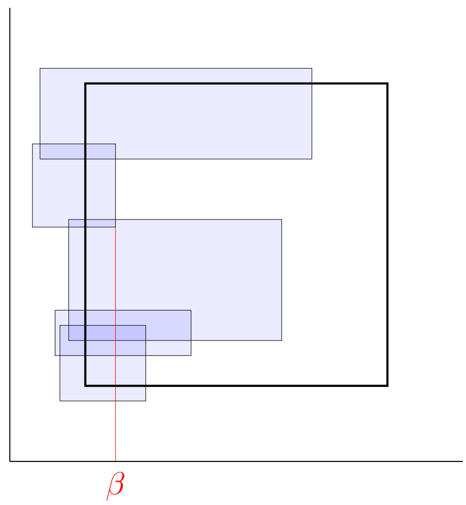
$$\sum_{C\in\mathcal{A}} |C| \geq |B|, \qquad (✢)$$

er vi fremme, for $\mu^* B$ er jo nettopp *infimum* av venstresiden i ✢.

Vi skal først bevise lemma 3 for endelige og lukkede bokser. Anta derfor at B er en slik boks. Vi har da at $B = I_B \times D_B$ der $I_B = [a, b]$, og der $D_B \subseteq \mathbb{R}^{d-1}$ er en boks av dimensjon $d - 1$. La videre $\mathcal{A}$ være en overdekning av B. Boksen B er kompakt, og Heine-Borels overdekningssats gir at $\mathcal{A}$ har en endelig underoverdekning. Vi kan klart erstatte $\mathcal{A}$ med en underoverdekning, for summen på venstre side av ✢ vil å så fall synke. Med andre ord kan vi anta at $\mathcal{A}$ er endelig. Vi kan også anta at ingen boks fra $\mathcal{A}$ er inneholdt i unionen av de andre boksene fra $\mathcal{A}$ — har vi en slik, kastere vi den bare ut av $\mathcal{A}$.

Ideen i beviset er ganske enkel. Vi skal bruke induksjon på antall bokser i overdekningen, og hovedelementet i beviset er å dele boksen B i to nye bokser på en slik måte at hver av de to delene dekkes av færre bokser enn den opprinnelige overdekningen bestod av.

Vi skal gjøre bruk av underfamilien $\mathcal{A}' \subseteq \mathcal{A}$ bestående av alle boksene i $\mathcal{A}$ som har punkter felles med sideflaten $\{a\} \times I_2 \times I_3 \times \ldots \times I_d$ til B — denne sideflaten omtaler vi som den venstre (siden den på figuren tilsvarer den venstre kanten til rektangelet) og betegner den med S — og vi lar underfamilien $\mathcal{A}'' \subseteq \mathcal{A}$ bestå av alle de andre boksene i $\mathcal{A}$.



Figur 1: Boksene som treffer venstrekanten og som utgjør familien $\mathcal{A}'$, og verdien β som deler B i B_1 og B_2

Vi lar β være gitt ved $\beta = \inf\{b_C : C \in \mathcal{A}'\}$ — det er altså det minste blant de høyre endepunktene til intervallene I_C med $C \in \mathcal{A}'$. Boksen i $\mathcal{A}'$ som realiserer β kaller vi C_0 (hvis det skulle være flere, velg en av dem).

Vi antar nå at $\beta < b$. Det kan selvsagt inntreffe at $\beta \geq b$, men det tilfellet skyver vi ut til et oppsamligsheat på slutten av beviset.

Vi deler nå B i to, ved å la $B_1 = [a, \beta] \times D_B$ og $B_2 = [\beta, b] \times D_B$. Da er klart $B = B_1 \cup B_2$.

Den nye overdekningen $\mathcal{B}''$ av B_2 lager vi på følgende måte. For hver boks $C \in \mathcal{A}'$ — som altså treffer den venstre sidekanten — og som er forskjellig fra C_0, tar vi med boksen $C' = (\beta - \epsilon, b_C) \times D_C$, der ϵ er et lite positivt tall I tillegg inkluderer vi alle boksene fra $\mathcal{A}''$ — det er de som ikke treffer sidekanten.

Dette er klart en overdekning av B_2 siden alle punktene i B_2 har en førstekoordinat som er større enn eller lik β, og det er en overdekning som har færre elementer enn $\mathcal{A}$ siden C_0 ble unntatt i konstruksjonen.

Den nye overdekningen $\mathcal{B}'$ av B_1 er simpelthen vår gamle kjenning $\mathcal{A}'$; eller for å være helt presis, vi utvider hver boks C fra $\mathcal{A}'$ noe for å få med eventuelle randpunkter. Det vil si at vi lar $\mathcal{B}'$ bestå av boksene $C' = (a_C, b_C + \epsilon) \times D_C$ der C gjennomløper $\mathcal{A}'$.

Dette er klart en overdekning av B_1, men for å kunne bruke induksjonshypotesen må vi også sjekke at ikke alle boksene fra $\mathcal{A}$ ligger i $\mathcal{A}'$. Var det tilfelle, ville hvert punkt i $(\beta, b) \times D_{C_0}$ måtte ligge i en boks fra $\mathcal{A}$ som strakte seg helt bort til venstre sidekant. Dermed ville C_0 være inneholdt i unionen av disse boksene, noe den ikke er siden vi har antatt at ingen boks fra $\mathcal{A}$ ligger i unionen av de andre.

Ved induksjon får vi

$$\begin{aligned}|B_1| \leq \sum_{C \in \mathcal{B}''} |C| &= \sum_{C \in \mathcal{A}''} |C| + \sum_{C \in \mathcal{A}', C \neq C_0} (b_C - \beta + \epsilon)\, |D_C| \\ &= \sum_{C \in \mathcal{A}''} |C| + \sum_{C \in \mathcal{A}', C \neq C_0} (b_C - \beta)\, |D_C| + M\epsilon.\end{aligned}$$

og

$$|B_2| \leq \sum_{C' \in \mathcal{B}'} |C'| = \sum_{C \in \mathcal{A}'} (\beta - a_C)\, |D_C| + M'\epsilon$$

Summerer vi de to ulikheten og lar ϵ gå mot null, finner vi

$$|B| = |B_1| + |B_2| \leq \sum_{C \in \mathcal{A}} |C| = \sum_{C \in \mathcal{A}''} |C| + \sum_{C \in \mathcal{A}'} |C|\,.$$

Før beviset er avsluttet, har vi et oppsamlingsheat, dit vi dyttet er par ting.

For det føste må vi håndtere tilfellet der $\beta \geq b$. Det betyr at alle boksene i $\mathcal{A}'$ er på formen $(a_C, b_C) \times D_C$ der $(a, b) \subseteq (a_C, b_C)$. Da følger det at boksene D_C dekker den venstre sidekanten — som vi har kalt S — når C gjennomløper $\mathcal{A}'$, og ved induksjon på dimensjonen d, finner vi at

$$\sum_{C \in \mathcal{A}'} |D_C| \geq |S|\,.$$

Derfor har vi

$$\sum_{C\in\mathcal{A}'} |C| = \sum_{C\in\mathcal{A}'} (b_C - a_C)\,|D_C| \geq \sum_{C\in\mathcal{A}'} (b-a)\,|D_C| \geq (b-a)\,|S| = |B|\,.$$

For det andre antok vi i starten at B var en endelig og lukket boks. Om B ikke er endelig, kan vi finne endelige lukkede bokser B_n i B med $\lim_{n\to\infty} |B|_n = \infty$, (*e.g.,* i ethvert uendelig intervall finnes endelige, lukkede intervalle av vilkårlig stor lengde) Monotonitet og ulikheten ✢ for lukkete og endelig bokser gir oss ulikheten ✢ for uendelige bokser.

Hvis B ikke er lukket, finnes en lukket boks med innhold en "epsilon" unna $|B|$: Om $B = I_1 \times I_2 \times \ldots \times I_d$, erstatter vi I_n med et lukket intervall av lengde ϵ større enn I_n. Da er $|B| = \prod |I_n| + \epsilon$, og vi konkluderer siden vi har vist ulikheten ✢ for lukkete bokser. ❑