UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i:	MAT 2310 — Optimal kontrollteori.
Eksamensdag:	Onsdag 2. juni 2004.
Tid for eksamen:	14.30 – 17.30.
Oppgavesettet er på 2 sider.	
Vedlegg:	Ingen.
Tillatte hjelpemidler:	Sydsæter, Strøm, Berck: Economists' Mathematical Manual, (Matematisk formelsamling for økonomer).

Kontroller at oppgavesettet er komplett
før du begynner å besvare spørsmålene.

Oppgave 1.

Betrakt problemet

$$\operatorname*{maks}_{u_t} \left\{ \sum_{t=0}^{T-1} \ln u_t + \ln x_T \right\}$$

når $x_{t+1} = x_t - u_t$; $0 \le t \le T$, $x_0 > 0$ gitt og der verdien av u_t kan velges fritt i $U = (0, x_t)$ for alle t.

Definer

$$J_T(x) = \ln x$$

og

$$J_s(x) = \operatorname*{maks}_{u_t} \left\{ \sum_{t=s}^{T-1} \ln u_t + \ln x_T \right\} \qquad \text{for } s = 0, \ldots, T-1,$$

når $x_{t+1} = x_t - u_t$; $s \le t < T$, $x_s = x > 0$, $u_t \in (0, x_t)$, og la $u_s^*(x)$ være tilhørende optimalt valg av u_s.

(Fortsettes side 2.)

a) Bruk dynamisk programmering til å finne

$$J_{T-1}(x), u^*_{T-1}(x) \quad \text{og} \quad J_{T-2}(x), u^*_{T-2}(x).$$

b) Vis at $J_{T-k}(x) = (k+1)\ln\left(\frac{x}{k+1}\right)$ for $0 \leq k \leq T$, og finn en optimal kontroll $u^*_{T-k}(x)$ for $0 \leq k \leq T$.

Oppgave 2.

Et kontrollproblem er gitt ved

$$V = \max_u \int_0^2 ux\,dt, \qquad -1 \leq u \leq 1$$

$$\dot{x} = (1-u)x, \quad x(0) = 1, \quad x(2) \text{ er fri.}$$

a) Angi Hamilton-funksjonen for problemet, og still opp de betingelsene som Maksimumsprinsippet gir for en optimal løsning.

b) Bestem en kandidat (x^*, u^*) til et optimalt par.
(Vink: Prøv med $1 - p(t) < 0$ og $x^*(t) > 0$ på et intervall $[0, t_0)$. Velg den største mulige slike t_0.)

c) Begrunn at løsningen i b) virkelig er et optimalt par. Finn også maksimumsverdien V.

SLUTT