UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i:	MAT-INF1310 — Differensiallikninger.
Eksamensdag:	Tirsdag 14. juni 2005.
Tid for eksamen:	09.00 – 12.00.
Oppgavesettet er på 2 sider.	
Vedlegg:	Ingen.
Tillatte hjelpemidler:	Ingen.

Kontroller at oppgavesettet er komplett
før du begynner å besvare spørsmålene.

Oppgave 1.

Sjekk at følgende differentiallikning for funksjonen $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, er separabel og finn et uttrykk for løsningen:

$$\begin{cases} x'(t) = \exp(2t - x(t)), & \text{for alle } t \in \mathbb{R}, \\ x(0) = 0. \end{cases}$$

Oppgave 2.

Vi betrakter den tredjeordens lineære differensiallikningen for funksjonen $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:

(E) $$x'''(t) + x''(t) + x'(t) + x(t) = \cos(t), \qquad \text{for alle } t \in \mathbb{R}.$$

Den homogene likningen som tilsvarer (E) er:

(H) $$x'''(t) + x''(t) + x'(t) + x(t) = 0, \qquad \text{for alle } t \in \mathbb{R}.$$

a) Vi definerer en funksjon $x_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ved:

$$x_1(t) = e^{-t}, \qquad \text{for alle } t \in \mathbb{R}.$$

Sjekk at x_1 er en løsning til den homogene likningen (H).

(Fortsettes side 2.)

b) Løsningene til (H) danner et reelt vektorrom V. Hva er dimensjonen til V? Finn en basis for dette rommet V.

c) Finn den generelle løsningen til (E).

Oppgave 3.

For hver $a \in \mathbb{R}$ definerer vi matrisen $A(a)$ ved

$$A(a) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & a \end{pmatrix}.$$

Spørsmålene kan løses uavhengig av hverandre.

a) Hva er den generelle løsningen til systemet av differentiallikninger:

$$\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = A(0) \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}, \qquad \text{for alle } t \in \mathbb{R},$$

for funksjoner $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ og $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$?

b) Anta at a er gitt og $a \leq 0$ og at $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ og $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tilfredsstiller systemet av differentiallikninger:

$$\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = A(a) \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}, \qquad \text{for alle } t \in \mathbb{R}.$$

Definer $E : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ved $E(t) = x(t)^2 + y(t)^2$ for alle $t \in \mathbb{R}$. Vis at E er en avtagende funksjon.

c) For hvilke verdier av $a \in \mathbb{R}$ har alle egenverdiene (reelle eller komplekse) til matrisen $A(a)$ ekte negativ reell del ($\operatorname{Re} \lambda < 0$)? Anta nå at denne betingelsen er oppfylt. Anta videre at $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ og $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tilfredsstiller systemet:

$$\text{(S)} \qquad \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = A(a) \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}, \qquad \text{for alle } t \in \mathbb{R}.$$

Bruk den generelle formen til løsningene av systemet (S) til å vise at (uansett initialbetingelser):

$$\lim_{t \to +\infty} x(t) = 0 \qquad \text{og} \qquad \lim_{t \to +\infty} y(t) = 0.$$

(Det kan med fordel sees adskilt på tilfellene $a < -2$, $a = -2$, $a > -2$.)

d) La $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ og $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tilfredsstille systemet:

$$\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = A(\sin(t^2)) \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}, \quad \text{for alle } t \in \mathbb{R} \text{ og } \quad \begin{cases} x(0) = 1, \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

Finn, ved hjelp av Gronwalls lemma, en verdi $C \in \mathbb{R}$ slik at

$$|x(t)| \leq C\, e^t \qquad \text{for alle } t \geq 0.$$

(Hint: Betrakt funksjonen $E : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definert som i b).)

SLUTT