UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i:	MAT-INF1310 — Differensialligninger.
Eksamensdag:	Torsdag 14. juni 2007.
Tid for eksamen:	14.30 – 17.30.
Oppgavesettet er på 2 sider.	
Vedlegg:	Ingen.
Tillatte hjelpemidler:	Godkjent kalkulator.

Kontroller at oppgavesettet er komplett
før du begynner å besvare spørsmålene.

Oppgave 1.

Betrakt differensialligningen

$$y'(t) = 1 - y(t)^2, \tag{1}$$

a. Anta at $0 < y(0) = \bar{y} < 1$. Finn $\lim_{t\to\infty} y(t)$. (Du trenger *ikke* å løse differensialigningen for å finne denne grensen).

b. Vis at

$$\begin{aligned} y(t+h) = y(t) + h\left(1 - y(t)^2\right) - h^2\left(1 - y(t)^2\right)y(t) \\ - \frac{h^3}{3}\left(1 - y(\xi)^2\right)\left(1 - 3y(\xi)^2\right), \end{aligned}$$

der $\xi \in [t, t+h]$. (Hint: Du kan bruke Taylorrekka til y om t).

c. Vi definerer en metode for å løse (1) numerisk ved

$$y_0 = \bar{y}, \quad y_{n+1} = y_n + h\left(1 - y_n y_{n+1}\right), \; n = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

her er $h < 1$ et lite positivt tall. Vis at dersom $0 < \bar{y} < 1$ så er $y_n < y_{n+1} < 1$ for alle n.

(Fortsettes side 2.)

d. La nå $\tilde{y}$ være en løsning av (1) slik at $\tilde{y}(nh) = y_n$. Vis at denne metoden har en lokal trunkeringsfeil av 3. orden, altså at

$$|\tilde{y}((n+1)h) - y_{n+1}| \leq Ch^3,$$

for en konstant C.

e. Finn den generelle løsningen på (1), når vi har $y(0) = \bar{y}$.

Oppgave 2.

La B være en $n \times n$ matrise og sett $A = kI + B$ der k er et reellt tall.

a. Vis at

$$e^{tA} = e^{kt}e^{tB}.$$

Oppgave 3.

a. Finn alle likevektspunktene for systemet av differensialligninger

$$\begin{aligned} x' &= y - x \\ y' &= (x-1)(y-2). \end{aligned} \tag{2}$$

Finn også typen til likevektspunktene (f.eks. *stabil spiral, sadelpunkt, kilde osv., og hvis relevant, rotasjonsretning*).

b. Skissér et faseportrett for (2). Faseportrettet skal inkludere alle likevektspunktene og inneholde mange løsningskurver.

SLUTT