# UNIVERSITETET I OSLO

## Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

| | |
|---|---|
| Eksamen i: | MAT2310 — Optimal kontrollteori. |
| Eksamensdag: | Tirsdag 10. juni 2008. |
| Tid for eksamen: | 14.30 – 17.30. |
| Oppgavesettet er på 2 sider. | |
| Vedlegg: | Ingen. |
| Tillatte hjelpemidler: | Sydsæter, Strøm, Berck: *Economists' Mathematical Manual (Matematisk Formelsamling for Økonomer)*. |

Kontroller at oppgavesettet er komplett
før du begynner å besvare spørsmålene.

## Oppgave 1.

**a**. Sett $F(x,z) = x\sqrt{1+z^2}$. Vis at $F$ er konveks på mengden $(x,z) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$, der $\mathbb{R}^+ = (0,\infty)$.

**b**. I resten av oppgaven skal vi finne en deriverbar funksjon $x(t)$ definert for $t \in [0,1]$ med $x(0) = 1$ og $x(1) = \cosh(1)$, som er slik at overflaten på omderiningslegemet som fåes ved å rotere grafen til $x(t)$ om $t$ aksen er minimal. Overflaten til dette omdreiningslegemet er gitt ved

$$2\pi \int_0^1 x(t)\sqrt{1+(\dot{x}(t))^2}\,dt.$$

Sett opp Euler-Lagrange ligningen for dette minimeringsproblemet, og vis at den kan skrives

$$1 = \frac{x\ddot{x}}{1+\dot{x}^2}. \tag{1}$$

**c**. Vis at dette medfører

$$\frac{d}{dt}\ln(x) = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\ln\left(1+\dot{x}^2\right).$$

*(Fortsettes side 2.)*

**d**. Finn en løsning på denne differensialligningen med randbetingelsene over. Forklar hvorfor dette er en løsning av minimeringsproblemet. Du kan få bruk for formelen

$$\int \frac{dz}{\sqrt{z^2-1}} = \cosh^{-1}(z).$$

# Oppgave 2.

Et kontrollproblem er gitt ved

$$\begin{aligned} V(s,y) = \max_{u\in\mathbb{R}} \left[ -\left( \int_s^1 \frac{x^2}{2} + \frac{u^2}{2}\, dt \right) + \frac{1}{2}\left(x(1)\right)^2 \right] \quad s \le 1, \\ \dot{x}(t) = u(t), \quad s < t < 1 \\ x(s) = y \quad \text{og } x(1) \text{ er fri.} \end{aligned} \tag{2}$$

**a**. Formulér maksimumsprinsippet for dette kontrollproblemet, og finn et mulig optimalt par $(x^*, u^*)$.

**b**. Finn $V(s,y)$.

**c**. Vi skal nå se på en diskret versjon av problemet over. La $h$ være et lite tall $h \ll 1$, og sett

$$\begin{aligned} J_s(x) = \max_{u_s,\ldots,u_{T-1}} \left[ -h \sum_{t=s}^{T-1} \left( \frac{x_t^2}{2} + \frac{u_t^2}{2} \right) + \frac{x_T^2}{2} \right] \\ \frac{x_{t+1}-x_t}{h} = u_t,\ x_s = x. \end{aligned} \tag{3}$$

Her er $T$ et heltall slik at $hT = 1$. Skriv ned fundamentalligningen i dynamisk programmering for dette problemet. Finn også $J_T(x)$ og $J_{T-1}(x)$, samt den optimale kontrollen $u^*_{T-1}(x)$.

**d**. Vis at $J_{T-t}(x) = \frac{k_t}{2}x^2$, og at

$$u^*_{T-(t+1)}(x) = \frac{xk_t}{1-k_t h},$$

der følgen $k_t$ er gitt rekursivt ved

$$k_{t+1} = \left( \frac{1}{1-k_t h} - h \right),\ k_0 = 1.$$

SLUTT