UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i:	MAT2440 — Differentialligninger og optimal kontrolteori
Eksamensdag:	Torsdag, 10. juni 2010
Tid for eksamen:	9.00 – 12.00
Oppgavesettet er på 3 sider.	
Vedlegg:	Ja
Tillatte hjelpemidler:	ingen

Kontroller at oppgavesettet er komplett før du begynner å besvare spørsmålene.

Oppgave 1 (vekt 20%)

Finn alle likevektspunktene for systemet av differensialligninger

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -3x + 4y + xy \\ \dfrac{dy}{dt} = -2x + 6y - xy. \end{cases}$$

For hvert likevektspunkt, finn det lineariserte systemet og bestem typen til likevektspunktet (f.eks stabil spiral, sadelpunkt, kilde osv.)

Oppgave 2 (vekt 40%)

Vi ser på systemet av differensialligninger

$$\frac{dY}{dt} = AY$$

der

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 6 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}.$$

2a (vekt 20%)

Finn den generelle løsningen.

2b (vekt 10%)

Finn løsningen med initialverdier lik $Y_0 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$.

2c (vekt 10%)

Finn en fundamental matrise løsning og beregn e^{tA}.

(Fortsettes på side 2.)

Oppgave 3 (vekt 40%)

3a (vekt 10%)

Finn den generelle løsningen av systemet av differensialligninger

$$\dot{Y} = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 \\ 6 & -1 \end{pmatrix} Y.$$

3b (vekt 20%)

Betrakt følgende kontrollproblem

$$\max_u \int_0^{\ln(2)} (-3x^2(t) - u^2(t))\, dt$$

der

$$\dot{x} = x + u, \quad x(0) = 0, \quad x(\ln(2)) = -1, \quad u \in (-\infty, \infty).$$

Finn det eneste paret (x^*, u^*) som tilfredstiller maksimum prinsippet for dette problemet. Vis at paret du fant er også en løsning til det orginale optimale kontrolproblemet.

3c (vekt 10%)

Vi ser på det samme problemet som i **3b** men vi krever nå at $x(\ln(2)) \geq -1$. Finn det optimale paret (x^*, u^*) som løser problemet.

SLUTT

(Fortsettes på side 3.)

VEDLEGG

Maksimum prinsippet: Anta at $(x^*(t), u^*(t))$ er et optimal par for problemet

$$\text{maks} \int_{t_0}^{t_1} f(t, x(t), u(t))\, dt, \quad u \in U \subset \mathbb{R},$$

$$\dot{x} = g(t, x(t), u(t)), \quad x(t_0) = x_0$$

med en av terminalbetingelser pålagt

$$(i) \quad x(t_1) = x_1, \quad (ii) \quad x(t_1) \geq x_1 \quad \text{eller} \quad (iii) \quad x(t_1) \text{ fri} \tag{1}$$

La

$$H(t, x, u, p) = f(t, x, u) + pg(t, x, u).$$

Da fins det en kontinuerlig funksjon $p(t)$ slik at for alle t i $[t_0, t_1]$ gjelder

(a) $H(t, x^*(t), u, p(t)) \leq H(t, x^*(t), u^*(t), p(t)) \quad$ for alle $u \in U$

(b) Funksjon p tilfredstiller

$$\dot{p} = -H'_x(t, x^*(t), u^*(t), p(t))$$

(c) Svarende til betingelsene i (1) er det en tilhørende terminalbetingelse:

(i') $p(t_1)$ ingen betingelse
(ii') $p(t_1) \geq 0$ (med $p(t_1) = 0$ hvis $x^*(t_1) > x_1$)
(ii') $p(t_1) = 0$