UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i	INF-MAT 3370 — Lineær optimering
Eksamensdag:	2. juni 2009
Tid for eksamen:	09.00 – 12.00
Oppgavesettet er på 3 sider.	
Vedlegg:	Ingen
Tillatte hjelpemidler:	Bare godkjent kalkulator.

Kontroller at oppgavesettet er komplett før
du begynner å besvare spørsmålene.

Oppgavesettet består av 8 spørsmål med tilnærmet samme vekt.

Oppgave 1

Betrakt følgende LP problem:

$$
\begin{array}{lrcrcrcl}
\text{max} & 4x_1 & + & x_2 & - & x_3 & & \\
\text{forutsatt at} & & & & & & & \\
 & x_1 & & & + & 3x_3 & \leq & 6 \\
 & 3x_1 & + & x_2 & + & 3x_3 & \leq & 9 \\
 & \multicolumn{7}{l}{x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0}
\end{array}
\tag{1}
$$

1a

Løs problem (1) med simpleksalgoritmen.

1b

Formuler det duale problemet til (1) og illustrer det duale problemet geometrisk ved å tegne opp det tillatte området i planet.

(Fortsettes på side 2.)

Oppgave 2

Det følgende LP problemet har en optimal løsning x^* med x_1, x_2 og x_3 som basisvariabler:

$$
\begin{array}{lrcrcrcrcrcl}
\text{min} & x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & + & x_4 & + & 5x_5 & & \\
\text{forutsatt at} & & & & & & & & & & & \\
& x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & 2x_4 & + & 2x_5 & = & b_1 \\
& & & x_2 & + & x_3 & & & + & 3x_5 & = & b_2 \\
& & & & & x_3 & + & x_4 & + & x_5 & = & b_3 \\
& & & & & \multicolumn{7}{l}{x_i \geq 0 \quad \text{for } i = 1, \ldots, 5}
\end{array}
\tag{2}
$$

2a

Finn den optimale løsningen x^* uttrykt ved b_1, b_2 og b_3.

2b

Vis at det duale LP problemet til (2) kan formuleres som:

$$
\begin{array}{lrcrcrcl}
\text{max} & b_1y_1 & + & b_2y_2 & + & b_3y_3 & & \\
\text{forutsatt at} & & & & & & & \\
& y_1 & & & & & \leq & 1 \\
& y_1 & + & y_2 & & & \leq & 2 \\
& y_1 & + & y_2 & + & y_3 & \leq & 1 \\
& 2y_1 & + & & + & y_3 & \leq & 1 \\
& 2y_1 & + & 3y_2 & + & y_3 & \leq & 5
\end{array}
\tag{3}
$$

2c

Bruk komplementær slakk til å løse det duale problemet.

(Fortsettes på side 3.)

Oppgave 3

La polyederet P være gitt som løsningsmengden til det lineære systemet

$$\begin{array}{ccccccc} x_1 & + & x_2 & & & \leq & 1 \\ & & x_2 & + & x_3 & \leq & 1 \\ x_1 & & & + & x_3 & \leq & 1 \\ x_1 & + & x_2 & + & x_3 & \geq & \frac{4}{3} \\ \multicolumn{7}{l}{x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0} \end{array}$$

3a

Bruk Fourier-Motzkin-eliminasjon til å eliminere x_1 og illustrer den resulterende projeksjonen av P inn i x_2x_3-planet geometrisk.

Oppgave 4

En $n \times n$ matrise X kalles dobbelt stokastisk hvis

$$X_{ij} \geq 0,\ i,j = 1,\ldots,n, \quad \sum_{i=1}^{n} X_{ij} = 1,\ j = 1,\ldots,n, \quad \sum_{j=1}^{n} X_{ij} = 1,\ i = 1,\ldots,n$$

Med andre ord, elementene i X er ikke-negative, og rad og kolonner summerer til 1.

4a

Vis at problemet

$$\begin{array}{c} \min \sum_{i,j=1}^{n} c_{ij} X_{ij} \\ X \text{ er dobbelt stokastisk} \end{array} \tag{4}$$

kan løses som et minimum kost nettverk strøm problem i en bipartitt (todelt) graf.

4b

Hvorfor vil det alltid finnes en heltallig optimal løsning til problem (4)?