UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i	INF-MAT 3370 — Lineær optimering
Eksamensdag:	2. juni 2009
Tid for eksamen:	09.00 – 12.00
Oppgavesettet er på 5 sider.	
Vedlegg:	Ingen
Tillatte hjelpemidler:	Bare godkjent kalkulator.

Kontroller at oppgavesettet er komplett før
du begynner å besvare spørsmålene.

Oppgavesettet består av 8 spørsmål med tilnærmet samme vekt.

Oppgave 1

Betrakt følgende LP problem:

$$\begin{array}{llrcrcrcl} \text{max} & & 4x_1 & + & x_2 & - & x_3 & & \\ \text{forutsatt at} & & & & & & & & \\ & & x_1 & & & + & 3x_3 & \leq & 6 \\ & & 3x_1 & + & x_2 & + & 3x_3 & \leq & 9 \\ & & \multicolumn{7}{l}{x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0} \end{array} \tag{1}$$

1a

Løs problem (1) med simpleksalgoritmen.

Løsning:

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} \zeta = & 0 & + & 4x_1 & + & x_2 & - & x_3 \\ \hline w_1 = & 6 & - & x_1 & & & - & 3x_3 \\ w_2 = & 9 & - & 3x_1 & - & x_2 & - & 3x_3 \end{array}$$

Pivoterer x_1 inn og w_2 ut:

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} \zeta = & 12 & - & \frac{4}{3}w_2 & - & \frac{1}{3}x_2 & - & 5x_3 \\ \hline w_1 = & 3 & + & \frac{1}{3}w_2 & + & \frac{1}{3}x_2 & - & 2x_3 \\ x_1 = & 3 & - & \frac{1}{3}w_2 & - & \frac{1}{3}x_2 & - & x_3 \end{array}$$

Optimal løsning: $x_1 = 3$, $x_2 = 0$ og $x_3 = 0$ (og $w_1 = 0$, $w_2 = 3$); optimal verdi er 12.

(Fortsettes på side 2.)

1b

Formuler det duale problemet til (1) og illustrer det duale problemet geometrisk ved å tegne opp det tillatte området i planet.
Løsning:

$$\begin{array}{lrcrcr}
\text{min} & 6y_1 & + & 9y_2 & & \\
\text{forutsatt at} & & & & & \\
& y_1 & + & 3y_2 & \geq & 4 \\
& & & y_2 & \geq & 1 \\
& 3y_1 & + & 3y_2 & \geq & -1 \\
& \multicolumn{5}{l}{y_1, y_2 \geq 0}
\end{array}$$

Oppgave 2

Det følgende LP problemet har en optimal løsning x^* med x_1, x_2 og x_3 som basisvariabler:

$$\begin{array}{lrcrcrcrcrcl}
\text{min} & x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & + & x_4 & + & 5x_5 & & \\
\text{forutsatt at} & & & & & & & & & & & \\
& x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & 2x_4 & + & 2x_5 & = & b_1 \\
& & & x_2 & + & x_3 & & & + & 3x_5 & = & b_2 \\
& & & & & x_3 & + & x_4 & + & x_5 & = & b_3 \\
& & & & & \multicolumn{7}{l}{x_i \geq 0 \quad \text{for } i = 1, \ldots, 5}
\end{array} \tag{2}$$

2a

Finn den optimale løsningen x^* uttrykt ved b_1, b_2 og b_3.
Løsning:
Setter $x_4^* = x_5^* = 0$ og får $x_1^* = b_1 - b_2,\ x_2^* = b_2 - b_3,\ x_3^* = b_3,\ x_4^* = x_5^* = 0$

2b

Vis at det duale LP problemet til (2) kan formuleres som:

$$\begin{array}{lrcrcrcl}
\text{max} & b_1y_1 & + & b_2y_2 & + & b_3y_3 & & \\
\text{forutsatt at} & & & & & & & \\
& y_1 & & & & & \leq & 1 \\
& y_1 & + & y_2 & & & \leq & 2 \\
& y_1 & + & y_2 & + & y_3 & \leq & 1 \\
& 2y_1 & + & & + & y_3 & \leq & 1 \\
& 2y_1 & + & 3y_2 & + & y_3 & \leq & 5
\end{array} \tag{3}$$

(Fortsettes på side 3.)

Løsning: Problemet (2) er på formen

$$\min c^T x \text{ f.a. } Ax = b,\ x \geq 0$$

som kan omskrives til

$$-\max -c^T x \text{ f.a. } Ax = b,\ x \geq 0.$$

Det duale til dette er

$$-\min b^T y \text{ f.a. } A^T y \geq -c$$

som igjen er ekvivalent med

$$\max b^T y \text{ f.a. } A^T y \leq c.$$

2c

Bruk komplementær slakk til å løse det duale problemet.
Løsning: Hvis de tre første ulikhetene holder med likhet, får vi $y_1 = 1$, $y_2 = 1$ og $y_3 = -1$. y er tillatt i det duale problemet (3) og komplementær slakk holder. y er derfor en optimal løsning til det duale problemet.

Oppgave 3

La polyederet P være gitt som løsningsmengden til det lineære systemet

$$\begin{array}{ccccccc} x_1 & + & x_2 & & & \leq & 1 \\ & & x_2 & + & x_3 & \leq & 1 \\ x_1 & & & + & x_3 & \leq & 1 \\ x_1 & + & x_2 & + & x_3 & \geq & \frac{4}{3} \\ \multicolumn{7}{l}{x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0} \end{array}$$

3a

Bruk Fourier-Motzkin-eliminasjon til å eliminere x_1 og illustrer den resulterende projeksjonen av P inn i x_2x_3-planet geometrisk.
Løsning:

Eliminerer x_1 og får at

$$\max\{0, \frac{4}{3} - x_2 - x_3\} \leq x_1 \leq \min\{1 - x_2, 1 - x_3\}$$

(Fortsettes på side 4.)

og det nye systemet

$$\begin{aligned}
\tfrac{4}{3} - x_2 - x_3 &\leq 1 - x_2 \\
\tfrac{4}{3} - x_2 - x_3 &\leq 1 - x_3 \\
0 &\leq 1 - x_2 \\
0 &\leq 1 - x_3 \\
x_2 + x_3 &\leq 1 \\
x_2 \geq 0,\ x_3 &\geq 0
\end{aligned}$$

som kan omskrives til

$$\begin{aligned}
x_2 + x_3 &\leq 1 \\
\tfrac{1}{3} \leq x_2 &\leq 1 \\
\tfrac{1}{3} \leq x_3 &\leq 1
\end{aligned}$$

Oppgave 4

En $n \times n$ matrise X kalles dobbelt stokastisk hvis

$$X_{ij} \geq 0,\ i,j = 1,\ldots,n, \quad \sum_{i=1}^{n} X_{ij} = 1,\ j = 1,\ldots,n, \quad \sum_{j=1}^{n} X_{ij} = 1,\ i = 1,\ldots,n$$

Med andre ord, elementene i X er ikke-negative, og rad og kolonner summerer til 1.

4a

Vis at problemet

$$\begin{gathered}
\min \sum_{i,j=1}^{n} c_{ij} X_{ij} \\
X \text{ er dobbelt stokastisk}
\end{gathered} \tag{4}$$

kan løses som et minimum kost nettverk strøm problem i en bipartitt (todelt) graf.

Løsning: Konstruer en bipartitt graf med n noder på hver side. La kanten mellom node i og node j ha vekt c_{ij}. Sett $b_v = -1$ for nodene i den ene delen og $b_v = 1$ for de andre nodene. En tillatt løsning for MKS problemet vil da være en tillatt løsning for problem (4) ved å la X_{ij} ha verdi lik strømmen på kanten mellom node i og j.

(Fortsettes på side 5.)

4b

Hvorfor vil det alltid finnes en heltallig optimal løsning til problem (4)?
Løsning: Problemet er begrenset og det finnes tillate løsninger (f.eks. $X = I$). Fra fundamentalteoremet for LP følger det at problemet vil ha en optimal løsning. Hvis det fins optimale løsninger til et MKS problem, vil det også finnes optimale heltallige løsninger.