UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i	INF-MAT 3370 — Lineær optimering
Eksamensdag:	1. juni 2010
Tid for eksamen:	09.00 – 12.00
Oppgavesettet er på 5 sider.	
Vedlegg:	Ingen
Tillatte hjelpemidler:	Bare godkjent kalkulator.

Kontroller at oppgavesettet er komplett før du begynner å besvare spørsmålene.

Oppgavesettet består av 9 spørsmål med tilnærmet samme vekt.

Løsningsforslag.

Oppgave 1

Betrakt LP problemet:

$$\begin{array}{lrcrcrcl} \max & x_1 & + & 2x_2 & + & 2x_3 & & \\ \text{f.a.} & & & & & & & \\ & x_1 & & & + & 2x_3 & \leq & 6 \\ & x_1 & + & 4x_2 & + & 2x_3 & \leq & 5 \\ & & & x_1, x_2, x_3 \geq 0. & & & & \end{array} \tag{1}$$

1a

Vis at $\hat{x} = (\hat{x}_1, \hat{x}_2, \hat{x}_3) = (5/2, 0, 5/4)$ er en tillatt løsning i problemet (1). Vis at $\hat{x}$ også er en optimal løsning i (1) når du får oppgitt at optimal verdi er 5.

Løsning: Sjekker første ulikhet: $5/2 + 0 + 2 \cdot (5/4) = 5 \leq 6$ *så denne holder. Sjekker andre ulikhet:* $5/2 + 0 + 2 \cdot (5/4) = 5 \leq 5$ *så denne holder. Og alle variablene er ikkenegative, så løsningen er tillatt. Verdien på obj.funk. blir* $5/2 + 0 + 2 \cdot (5/4) = 5$*, så løsningen er optimal.*

1b

Løs problemet (1) ved simpleksmetoden og finn en optimal løsning. Vis at problemet har flere optimale basisløsninger.

(Fortsettes på side 2.)

Løsning: Initiell basisliste:

$$\begin{array}{rcccccc}
\eta = & 0 & + & x_1 & + & 2x_2 & + & 2x_3 \\
\hline
w_1 = & 6 & - & x_1 & & & - & 2x_3 \\
w_2 = & 5 & - & x_1 & - & 4x_2 & - & 2x_3
\end{array}$$

Pivoterer x_3 inn og w_2 ut i basis:

$$\begin{array}{rcccccc}
\eta = & 5 & & & - & 2x_2 & - & w_2 \\
\hline
w_1 = & 1 & & & + & 4x_2 & + & w_2 \\
x_3 = & 5/2 & - & (1/2)x_1 & - & 2x_2 & - & (1/2)w_2
\end{array}$$

Koef. foran ikkebasisvar. er ikkepositive, så vi har funnet optimal løsning som er: $x_1 = x_2 = 0$, $x_3 = 5/2$ (og $w_1 = 1$, $w_2 = 0$). Optimal verdi er 5.
Det er ikke entydig optimal løsning: pivoterer x_1 inn og x_3 ut og får:

$$\begin{array}{rcccccc}
\eta = & 5 & - & 2x_2 & & & - & w_2 \\
\hline
w_1 = & 1 & + & 4x_2 & & & + & w_2 \\
x_1 = & 5 & - & 4x_2 & - & 2x_3 & - & w_2
\end{array}$$

så en annen optimal (basis)løsning er $x_1 = 5$, $x_2 = x_3 = 0$, $x_3 = 0$ (og $w_1 = 1$, $w_2 = 0$).

(Alternativt: fra punkt a) har vi funnet en annen optimal løsning, og da må det finnes minst to optimale basisløsninger.)

1c

Skriv opp det duale problemet til (1). Finn en optimal løsning av det duale (helst uten regning).

Løsning:

Det dual problemet er:

$$\begin{array}{lccccc}
\min & 6y_1 & + & 5y_2 & & \\
\text{f.a.} & & & & & \\
 & y_1 & + & y_2 & \geq & 1 \\
 & & & 4y_2 & \geq & 2 \\
 & 2y_1 & + & 2y_2 & \geq & 2 \\
 & & & y_1, y_2 \geq 0. & &
\end{array}$$

La som vanlig z være komplementær til x og w til y. Optimal dualløsning er $y_2 = 1$, $z_2 = 2$, resten 0; se første eller andre basisliste over.

1d

Betrakt funksjonen $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ gitt ved

$$f(x_1, x_2, x_3) = \sum_{j=1}^{3} \alpha_j x_j$$

(Fortsettes på side 3.)

der $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ er gitte tall, og anta at vi erstatter objektivfunksjonen i LP problemet (1) med f. Forklar hvorfor dette nye optimeringsproblemet har en optimal løsning.

Løsning: f er lineær, så vi har et LP problem. Den tillatte mengden er ikketom (fra første deloppgave) og begrenset, idet begrensningene medfører at (f.eks.) $0 \leq x_j \leq 5$ $(j \leq 3)$. LP problemet er derfor tillatt og ikke ubegrenset, og ved fundamentalproblemet for LP må derfor problemet ha en optimal løsning. (Dette følger også av Ekstremverditeoremet.)

1e

La $P \subset \mathbb{R}^3$ være mengden av tilatte løsninger i (1), dvs. løsningsmengden til de 5 begrensningene. Bestem projeksjonen P' av P ned i x_1x_2-planet, beskrevet ved lineære ulikheter. (Hint: Fourier-Motzkin). Illustrer P' i planet.

Løsning: Bruker Fourier-Motzkin eliminasjon og eliminerer x_3. Ulikhetene som involverer x_3 er

$$\begin{aligned} x_3 &\leq 3 - (1/2)x_1 \\ x_3 &\leq 5/2 - (1/2)x_1 - 2x_2, \\ 0 \leq x_3 & \end{aligned}$$

Dette gir de nye ulikhetene $0 \leq 3-(1/2)x_1$, $0 \leq 5/2-(1/2)x_1-2x_2$. *Dermed er projeksjonen P' av P ned i x_1x_2-planet gitt ved $x_1 \leq 6$, $x_1 + 4x_2 \leq 5$, $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$. Her er $x_1 \leq 6$ redundant idet de andre ulikhetene medfører at $x_1 \leq 5$. Så projeksjonen er gitt ved*

$$x_1 + 4x_2 \leq 5,\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0.$$

(Det er ikke feil å ta med $x_1 \leq 6$ her, men det er fint å observere at denne er redundant. Det sees også av figuren.)

Oppgave 2

Betrakt den rettede grafen $D = (V, E)$ med nodemengde $V = \{u_1, u_2, v_1, v_2\}$ og kantmengde $E = \{(u_1, v_1), (u_1, v_2), (u_2, v_1), (u_2, v_2)\}$. Vi betrakter et nettverk strøm problem i D der tilførsel/behov i nodene er gitt ved $b_{u_1} = b_{u_2} = 1$ og $b_{v_1} = b_{v_2} = -1$. La strømvektoren x være gitt ved $x_{u_1v_1} = x_{u_2v_2} = 1$ og $x_{u_1v_2} = x_{u_2v_1} = 0$.

2a

Finn et spenntre T i D slik at x er treløsningen knyttet til T. Er T entydig med denne egenskapen? Vis også at x er en optimal løsning av minimum kost strømproblemet (i D og med gitt b) når kostnadene er gitt ved

$$c_{u_1v_1} = c_{u_2v_2} = 1 \text{ og } c_{u_1v_2} = c_{u_2v_1} = 1 + \epsilon.$$

(Fortsettes på side 4.)

der $\epsilon > 0$ er et gitt tall.

Løsning: La T inneholde de tre kantene (u_1, v_1), (u_1, v_2), (u_2, v_2); dette er et spenntre i D. Beregner den tilhørende treløsningen (ved bladeliminasjon) og får $x_{u_1v_1} = 1$, $x_{u_1v_2} = 0$, $x_{u_2v_2} = 1$ mens $x_{u_2v_1} = 0$ (ikkebasisvariabel): dette gir nevnte x. T er ikke entydig: får samme treløsning med spenntreet T' med kanter (u_1, v_1), (u_2, v_1), (u_2, v_2).

Beregner dualløsning og bruker spenntre T over. Velg rotnode u_1 så $y_{u_1} = 0$. Får: $y_{v_1} = 1$, $y_{v_2} = 1 + \epsilon$, $y_{u_2} = \epsilon$. Dermed blir $z_{u_2v_1} = c_{u_2v_1} + y_{u_2} - y_{v_1} = (1 + \epsilon) + \epsilon - 1 = 2\epsilon > 0$, som viser at x er optimal.

Oppgave 3

Betrakt matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 7 \\ 3 & 2 & 4 \\ 2 & 6 & 4 \end{bmatrix}$$

3a

Betrakt matrisespillet gitt ved matrisen A der (som vanlig) A angir betaling fra radspiller R til kolonnespiller K. Finn en minmax strategi for R og en maxmin strategi for K. (Hint: finn et sadelpunkt). Finn også verdien til spillet.

Løsning: Ser at $(2, 3)$ er et sadelpunkt i A, fordi $a_{23} = 4$ er minst i sin kolonne og størst i sin rad. Så (rad) 2 er ren minmax strategi for R og (kolonne) 3 er ren maxmin strategi for K. Verdien til spillet er $V = a_{23} = 4$.

Oppgave 4

4a

La P og Q være to polytoper i $\mathbb{R}^n$. Vis at $P \cap Q$ også er en polytop.

Løsning: Ved korollar av hovedteorem for polyedre (se konveksitetsheftet) er både P og Q begrensede polyedre, så det fins lineære systemer $Ax \leq b$ og $Cx \leq d$ slik at

$$P = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b\}, \quad Q = \{x \in \mathbb{R}^n : Cx \leq d\}.$$

Men da er

$$P \cap Q = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b,\ Cx \leq d\}$$

som viser at $P \cap Q$ er et polyeder. Videre er $P \cap Q$ begrenset (idet det er inneholdt i P som er begrenset). Så $P \cap Q$ er et begrenset polyeder, og er derfor en polytop (igjen ved korollaret).

(Fortsettes på side 5.)

Oppgave 5

Betrakt polyedret

$$P = \{x \in \mathbb{R}^n : \sum_{j=1}^{n} a_j x_j = b, \ \ \sum_{j=1}^{n} x_j = 1, \ \ x_j \geq 0 \ \ (j \leq n)\}$$

der $a_1, a_2, \ldots, a_n$ og b er gitte positive tall slik at $a_1 < b < a_2$.

5a

Vis at punktet

$$x = ((a_2 - b)/(a_2 - a_1), (b - a_1)/(a_2 - a_1), 0, 0, \ldots, 0) \in \mathbb{R}^n$$

er et ekstrempunkt i P.

Løsning: Vet fra en proposisjon i Konveksitetsheftet at "ekstrempunkt=tillatt basisløsning". La A være $2 \times n$ koef.matrisen for likningene i P:

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

La A_B være submatrisen bestående av de to første kolonnene i A (så $B = \{1, 2\}$):

$$A_B = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

A_B er invertibel (idet $a_1 < a_2$ er radene lineært uavhengige) og er derfor en basis i A. Finner tilhørende basisløsning ved å løse likningsystemet $a_1x_1 + a_2x_2 = b$, $x_1 + x_2 = 1$ som gir $x_1 = \frac{a_2-b}{a_2-a_1}$, $x_2 = \frac{b-a_1}{a_2-a_1}$, og $x_3 = \cdots = x_n = 0$ (ikkebasisvariable). Har her at $x_1, x_2 > 0$ fordi $a_2 - a_1 > 0$ $b - a_1 > 0$ og $a_2 - b > 0$. Så denne basisløsningen er tillatt, og må derfor være et ekstrempunkt for P.

Lykke til!