Vi ser på 32-bits flyttall og ønsker å finne det største og minst flyttallet ($n_{min} \rightarrow n_{max}$) $\in \mathbb{N}$ slik at
24-bit

$$\{n_{min}, n_{min}-1, \dots 0, \dots n_{max}\}$$

Inneholder alle heltallene nøyaktig

$$\underbrace{1001 \dots 1}_{24\text{-bit}}\underbrace{0 \dots 1}_{8\text{-bit}} \qquad 2^8 = 256 \qquad \frac{256}{2} = 128$$

$$0,1 \dots 01 \times 2^e \qquad e \in \{-126, \dots, 127\}$$

$$=$$

$$\overset{8}{1}\overset{4}{1}\overset{2}{0}\overset{1}{1}_2 \quad 1\cdot 2^3 + 1\cdot 2^2 + 0\cdot 2^1 + 1\cdot 2^0 = 13_{10}$$

4-bit

$$0,1111 \times 2^4 = 1111_2 = 15$$
$$0,1000 \times 2^5 = 10000_2 = 16 = 2^4$$
$$0,1001 \times 2^5 = 10010_2 = 18$$

Skriver ikke opp. Da får vi en bit til fortegn.

Det største negative heltallet blir da $-0,1000 \times 2^5 = -16$

I 32-bit tallsystemet får vi da

$$n_{min} = -2^{24} \quad \text{og} \quad n_{max} = 2^{24}.$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \varepsilon \end{pmatrix}$$ Hva er kondisjonstallet.

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & \varepsilon^{-1} \end{pmatrix}$$

$$\|A\| \times \|A^{-1}\|$$

$$\|x\|_{\ell^2} = (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + \cdots x_n^2)^{\frac{1}{2}}$$

La $\|A\| = \max_{\substack{\|x\|_{\ell^2}=1 \\ x=0}} \|Ax\|_{\ell^2}$

$$\|A\| = \sigma_{max}(A)$$

Største singulærverdi.

Singulærverdi
er kvadratroten til egenverdiene til A^TA

$$A^T A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \varepsilon^2 \end{pmatrix}$$ Har egenverdier 1 og ε^2

så $\sigma_{max}(A) = \sqrt{1} = 1$

Antar $\varepsilon > 0$ er liten.

$$(A^{-1})^T A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\varepsilon^{-2}} \end{pmatrix}$$ Har egenverdier 1 og $\frac{1}{\varepsilon^2}$

så $\sigma_{max}(A) = \sqrt{\frac{1}{\varepsilon^2}} = \frac{1}{\varepsilon}$

$$\|A\| \times \|A^{-1}\| = \frac{1}{\varepsilon}$$

Let $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$

Finn p slik at $p(0) = f(0)$, $p'(1) = f'(1)$, $\int_0^1 p(x) = \int_0^1 f(x)\,dx$

La $f_1 = f(0)$, $f_2 = f'(1)$, $f_3 = \int_0^1 f(x)\,dx$

$p(0) = a_0$

$p'(x) = a_1 + 2a_2x$

$p'(1) = a_1 + 2a_2$

$\int_0^1 p(x)\,dx = \left[a_0x + \frac{1}{2}a_1x^2 + \frac{1}{3}a_2x^3\right]_0^1 = a_0 + \frac{1}{2}a_1 + \frac{1}{3}a_2$

$$\begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & 2 \\ 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{bmatrix}$$

Denne matrisen er invertibel og vi får entydig løsning

Ønsker nå å finne p slik at $p(0) = f(0)$, $p'(\frac{1}{3}) = f'(\frac{1}{3})$, $\int_0^1 p(x)\,dx = \int_0^1 f(x)\,dx$

Setter $f_1 = f(0)$

$f_2 = f'(\frac{1}{3})$

$f_3 = \int_0^1 f(x)\,dx$

$p'(\frac{1}{3}) = a_1 + \frac{2}{3}a_2$

$$\begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \frac{2}{3} \\ 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{bmatrix} \qquad Ax = b$$

$$\begin{bmatrix} 1 & & & f_1 \\ & 1 & \frac{2}{3} & f_2 \\ 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & f_3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & & & f_1 \\ & 1 & \frac{2}{3} & f_2 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & f_3 - f_1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & & & f_1 \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} & f_2 \\ 0 & 0 & 0 & f_3 - f_1 - \frac{1}{2}f_2 \end{bmatrix}$$

Svar: Hvis $f_3 - f_1 - \frac{1}{2}f_2 = 0$ så har vi uendelig mange løsninger.

Hvis $f_3 - f_1 - \frac{1}{2}f_2 \neq 0$ så har ligningssystemet ingen løsning.