Oppgave 3.3

Vis at

$$f(x) - p(x) = f[x_0, \dots, x_n, x] \prod_{j=0}^{n} (x - x_j)$$

Hvor p er polynomet som interpolerer f i punktene $x_0 \dots x_n$.

Vi vet at p kan skrives som

$$p(x) = f[x_0] + f[x_0, x_1](x - x_0) + \dots + f[x_0, \dots, x_n] \prod_{j=0}^{n-1} (x - x_j)$$

Finner polynomet som interpolerer f i $x_0 \dots x_n$ og y.

$$p'(x) = p(x) + f[x_0 \dots x_n, y] \prod_{j=0}^{n} (x - x_j)$$

$$f(y) = p'(y) = p(y) + f[x_0 \dots x_n\, y] \prod_{j=0}^{n} (y - x_j)$$

Setter nå $y = x$

$$f(x) - p(x) = f[x_0 \dots x_n\, x] \prod_{j=0}^{n} (x - x_j)$$

Oppgave 1 (Om indre produkt)

La $\mathbb{X}$ være et reelt vektorrom.
Et indre produkt på $\mathbb{X}$ er en funksjon $\langle \cdot , \cdot \rangle : \mathbb{X} \times \mathbb{X} \to \mathbb{R}$
og for alle $x, y, z \in \mathbb{X}$ og $a, b \in \mathbb{R}$
tilfredstiller det

(i) $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$
(ii) $\langle ax + by, z \rangle = a\langle x, z \rangle + b\langle y, z \rangle$
(iii) $\langle x, x \rangle \geq 0$
(iv) $\langle x, x \rangle = 0$ hvis og bare hvis $x = 0$.

I oppgaven har vi $I = [a, b]$ og $\mathbb{X} = C(I)$.
La $w : I \to [0, \infty)$ slik at $\int_I w(x)\,dx <$
og $w(x) = 0$ for et endelig antall $x \in I$.
Vis at $\langle f, g \rangle_w = \int_I f(x) \cdot g(x) \cdot w(x)\,dx$
er et indre produkt for $C(I)$.

(i) $\langle f, g \rangle_w = \int_I f(x) g(x) w(x)\,dx = \int g(x) f(x) w(x)\,dx$
$= \langle g, f \rangle_w$.

(ii) følger på tilsvarende måte.

(iii) Ser at $(f(x))^2 \geq 0$ vi har at $w(x) \geq 0$
og da har vi $0 \leq \int_I (f(x))^2 w(x)\,dx = \langle f, f \rangle_w$.

(iv) Ønsker å vise at
$\langle f, f \rangle = \int_I (f(x))^2 w(x)\,dx = 0$ hvis og bare hvis $f = 0$.

$\Leftarrow$ åpenbart

$\Rightarrow$ Ser at for hver $x \in I$ så er
$(f(x))^2 = 0$ hvis og bare hvis $f(x) = 0$.

Ser at det er to måter $(f(x))^2 w(x) = 0$
enten er $f(x) = 0$ eller så er $w(x) = 0$.
Siden $w(x) = 0$ i et endelig antall punkter
ønsker vi å vise at det ikke finnes
noen $f \in C(I)$ som er ikke-null i et
endelig antall punkter.
Da dette impliserer at $\int_I (f(x))^2 w(x)\,dx = 0 \Rightarrow f = 0$

La $x \in I$ være slik at $f(x) \neq 0$ og la $f \in C(I)$.
La $\varepsilon = \frac{|f(x)|}{2} > 0$. Siden f er kontinuerlig
så kan vi velge en $\delta > 0$ slik at for alle $y \in I$
som tilfredstiller $|x - y| < \delta$ så er $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$
Bruker omvendt trekantulikhet.

$$|f(x)| - |f(y)| \leq |f(x) - f(y)| < \varepsilon = \frac{|f(x)|}{2}$$

$$|f(x)| - |f(y)| < \frac{|f(x)|}{2}$$

$$\frac{|f(x)|}{2} < |f(y)|$$

Så $f \neq$ på intervallet $(x - \delta, x + \delta)$.
og f kan ikke være ikke-null i et endelig antall punkter.

$\square$

Digresjon

$I = [0, \infty)$
$w(x) = e^{-x}$ $\quad w \geq 0$ og $\int_I w(x)\,dx = \int_0^\infty e^{-x}\,dx = 1 < \infty$

$f(x) = e^{x}$ $\quad \langle f, f \rangle_w = \int_0^\infty e^{x} \cdot e^{x} \cdot e^{-x}\,dx = \int_0^\infty e^{x}\,dx = \infty$.

$I = (0, 1)$ $\quad w(x) = 1$ $\quad \int_0^1 w(x)\,dx = 1$.
$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$

$\langle f, f \rangle \int_{(0,1)} \frac{1}{\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}} \cdot 1\,dx = \int_{(0,1)} \frac{1}{x}\,dx = \infty$.