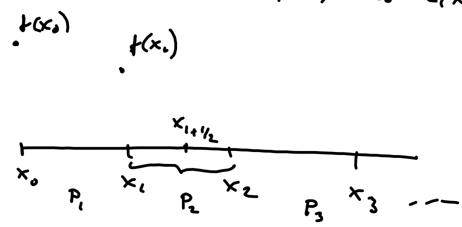
Oppgave 3.12

$P(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2$



$P_1(x_0) = f(x_0)$
$P_1(x_1) = f(x_1)$
$P_1'(x_1) = a_0$

$P_2'(x_1) = a_0$
$P_2(x_1) = f(x_1)$
$P_2(x_2) = f(x_2)$
$P_2'(x_2) = a_1$

Notasjon

$x_i = ih \qquad h > 0$

$x_{i+1/2} = (i+\frac{1}{2})h$

$f_i = f(x_i) \qquad s_{i+1/2} = s(x_{i+1/2})$

Kvadratisk spline som interpolerer f i $x_0 \dots x_n$ og er en gang kontinuerlig deriverbar.

Vis at hvis vi vet $s_{i+1/2}$ så impliserer dette differens ligningen

$$4(s_{i+1/2} + s_{i+3/2}) = f_i + 6f_{i+1} + f_{i+2}$$

Anta at vi vet alle $s_{i+1/2}$'ene for $i = 1 \dots n-2$.
Vi ser på s på intervallet $[x_i, x_{i+1}]$

$$s(x) = f_i + \frac{1}{h}(f_{i+1} - f_i)(x - x_i) + \frac{2}{h^2}(f_i - 2s_{i+1/2} + f_{i+1})(x-x_i)(x-x_{i+1})$$

$s(x)$ interpolerer f_i, f_{i+1} og $s_{i+1/2}$.

Ønsker at s' er kontinuerlig i hvert skjøtepunkt x_i

$$s'(x) = \frac{1}{h}(f_{i+1} - f_i) + \frac{2}{h^2}(f_i - 2s_{i+1/2} + f_{i+1})(x - x_i) + \frac{2}{h^2}(f_i - 2s_{i+1/2} + f_{i+1})(x - x_{i+1})$$

Ser på punktet x_{i+1}

$$s'(x_{i+1}) = \frac{1}{h}(f_{i+1} - f_i) + \frac{2}{h}(f_i - 2s_{i+1/2} + f_{i+1})$$
$$= \frac{1}{h}(f_{i+2} - f_{i+1}) - \frac{2}{h}(f_{i+1} - 2s_{i+3/2} + f_{i+2})$$

Snur vi litt rundt på dette får vi

$$f_{i+1} - f_i + 2f_i - 4s_{i+1/2} + 2f_{i+1} = f_{i+2} - f_{i+1} - 2f_{i+1} + 4s_{i+3/2} + 2f_{i+2}$$

$$4(s_{i+1/2} + s_{i+3/2}) = f_i + 6f_{i+1} + f_{i+2}$$

Oppgave 3.16 c)

Vi vet at $s(x_i) = 0 \quad \forall\, i \in \mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \dots\}$

$x_i = \mu^i \quad i \in \mathbb{N}_0 \quad \mu > 1$

Fra ligning (3.5) i boka har vi

Jeg skriver $s'(x_i) = s_i'$

$$\frac{s_{i-1}' + 2s_i'}{x_i - x_{i-1}} + \frac{2s_i' + s_{i+1}'}{x_{i+1} - x_i} = 0$$

$$\frac{s_{i-1}' + 2s_i'}{\cancel{(\mu - 1)}\cancel{\mu^{i-1}}} + \frac{2s_i' + s_{i+1}'}{\cancel{\mu^{i-1}}\underbrace{\cancel{(\mu^2 - \mu)}}_{\mu}} = 0$$

$$\mu s_{i-1}' + 2\mu s_i' + 2s_i' + s_{i+1}' = 0$$

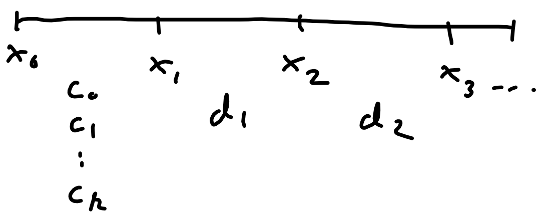
$$s_{i+1}' + 2(\mu + 1)s_i' + \mu s_{i-1}' = 0$$

Oppgave 3.16 b

Spline av grad k $(x_0 \dots x_n)$

$$S(x) = \sum_{i=0}^{k} c_i x^i + \sum_{j=1}^{n-1} d_j (x - x_j)_+^k$$

$$(x - x_j)_+ = \begin{cases} (x - x_j) & x \geq x_j \\ 0 & \text{ellers} \end{cases}$$



$S(x)$ utrykket ved $n+k$ funksjoner

Ser på $S(x) \equiv 0 \Rightarrow c_i = 0$, $d_j = 0$