MAT3110 høsten 2023 oblig 1

Innleveringsfrist

Torsdag 28. september 2023, 14:30, lastet opp i Canvas.

Instructions

You can choose between scanning handwritten notes or typing the solution directly on a computer (for instance with LaTeX). **The assignment must be submitted as a single PDF file.** Scanned pages must be clearly legible. The submission must contain your name, course and assignment number.

It is expected that you give a clear presentation with all the necessary explanations. Remember to include all relevant plots and figures. All aids, including collaboration, are allowed, but the submission must be written by you and reflect your understanding of the subject. In exercises where you are asked to write a computer program, you need to hand in the code along with the rest of the assignment. (Add the code to the single pdf.) You can use your programming language of choice.

There is only one attempt to pass the assignment and you must have a score of at least 60% to pass it.

Application for postponement

If you need to apply for a postponement of the submission deadline due to illness or other reasons, you have to contact the Student Administration at the Department of Mathematics (e-mail:`studieinfo@math.uio.no`) well before the deadline.

Both mandatory assignments in this course must be approved in the same semester before you are allowed to take the final examination.

Complete guidelines on compulsory assignments

For further details on the hand in of compulsory assignments, see:
`https://www.uio.no/english/studies/examinations/compulsory-activities/mn-math-mandatory.html`

Oppgaver

Oppgave 1.

I denne oppgaven studerer vi egenskaper ved Newtons metode når den brukes til å løse $f(x) = 0$ hvor $f(x) := \arctan(x)$. Likningen har ett nullpunkt $\xi = 0$.

a) La (x_k) være en følge beregenet med Newtons metode for å løse det introduserte problemet. Forklar hvorfor $\lim_{k\to\infty} x_k = \xi$ dersom x_0 er tilstrekkelig nær ξ og vis at følgen minst har konvergensorden $q = 3$.

   Hint: for konvergensordenen kan det hjelpe å bruke at $|f''(x)| \le |x|$ sammen med (1.23) fra (SM).

b) Vis at

$$g(x) := \begin{cases} f(x)/(xf'(x)) & \text{hvis} \quad x \neq 0 \\ 1 & \text{hvis} \quad x = 0 \end{cases}$$

   er en kontinuerlig og symmetrisk funksjon (dvs at $g(x) = g(-x)$) og at Newtons metode (for dette spesielle problemet) kan skrives

$$x_{k+1} = x_k(1 - g(x_k)) \qquad k = 0, 1, \ldots \tag{1}$$

c) Vis at det fins et unikt punkt $x^* \in (0, \infty)$ slik at $g(x^*) = 2$ og at

$$g(x) > 2 \quad \forall x \in (x^*, \infty).$$

   Hint: Vis at $g(x)$ er strengt voksende på $(0, \infty)$. Du kan bruke at $\arctan(x) \le x$ for alle $x > 0$.

d) Approksimer verdien til x^* numerisk til 5 korrekte desimaler med en iterasjonsmetode.

e) Bruk resultatet i deloppgaver b) og c) til å vise at newtonfølgen divergerer hvis x_0 er for langt unna ξ og beskriv det størst mulige ikketomme, åpne intervallet (a, b) omkring ξ som er slik at

$$\lim_{k\to\infty} x_k = \xi \quad \text{for alle newtonfølger med} \quad x_0 \in (a, b).$$

   Hint: Bruk representasjonen (1) og vis, eventuelt bruk om det blir vanskelig å vise, at om $x_0 < x^*$ så er $g(x_k) < g(x_0) < 2$ for alle $k \ge 0$, og om $x_0 > x^*$ så er $g(x_k) > g(x_0) > 2$ for alle $k \ge 0$.

f) Beregn følgen $(x_k)_{k=0}^6$ med Newtons metode

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

   for to ulike startverdier: $x_0 = 1.3$ og $x_0 = 1.4$. (Dvs ikke bruk representasjonen (1) når du implementerer, for den framgangsmåten er knotete å implementere slik at man unngår problemer når $x_k = 0$.) Stemmer de numeriske resultatene overens med det du kom fram til i deloppgave e)?

Opggave 2

Beregn QR-faktoriseringen av følgende matrise

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix},$$

og bruk faktoriseringen til å bestemme minstekvadratløsningen til følgende likning

$$Ax = \underbrace{\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}}_{=b}$$

Oppgave 3

For en matrise $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ for $n \geq 2$ koster det $e^1 n! + \mathcal{O}((n-1)!)$ aritmetiske operasjoner å beregne determinanten ved bruk av formelen

$$\det(A) = \sum_{\text{perm}} \text{sign}(\nu_1, \ldots, \nu_n) a_{1\nu_1} a_{2\nu_2} \cdots a_{n\nu_n},$$

og i tillegg utnytte kofaktormatriser (se (SM) side 43). Selv for små n-verdier som $n = 100$ blir kostnaden typisk så høy ved denne framgangmåten at den er ubrukelig på datamaskiner. I denne oppgaven skal vi kort se på hvordan matrisedeterminanter i praksis beregenes mer effektivt i programmeringsspråk som Matlab.

La $PA = LU$ være en LU-faktorisering av A, hvor P er en permutasjonsmatrise, L er enhets nedre triangulær og U er øvre triangulær. Forklar hvordan matrisene P, L og U kan brukes til å konstruere en langt mer effektiv metode for å beregne $\det(A)$ og beskriv kostnaden av framgangsmåten du foreslår. Du kan bruke at en LU-faktorisering av A koster $2n^3/3 + \mathcal{O}(n^2)$ aritmetiske operasjoner og at beregningen $\det(P)$ koster $\mathcal{O}(n^2)$ aritmetiske operasjoner og at $\det(P) \neq 0$ (den tar alltid en av verdiene ± 1).