UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i	INF-MAT 2350 — Numeriske Beregninger
Eksamensdag:	13 juni 2005
Tid for eksamen:	14.30 – 17.30

Oppgavesettet er på 2 sider.

Vedlegg:	Ingen
Tillatte hjelpemidler:	ingen

Kontroller at oppgavesettet er komplett før
du begynner å besvare spørsmålene.

Alle 6 delspørsmål vektlegges likt.

Oppgave 1 Numerisk integrasjon

Finn vektene w_0, w_1, og w_2 slik at kvadraturregelen

$$\int_0^1 f(x)\,dx \approx w_0 f(0) + w_1 f'(0) + w_2 f(1),$$

er eksakt for polynomer av grad ≤ 2.

Oppgave 2 Numerisk derivasjon

La x_0, x_1, x_2 være reelle tall slik at $x_1 - x_0 = x_2 - x_1 = h$ hvor $h > 0$ og anta at f er en funksjon med tre kontinuerlige deriverte i intervallet $[x_0, x_2]$. Utled et feilestimat for sentraldifferensapproksimasjonen $f'(x_1) \approx (f(x_2) - f(x_0))/(2h)$ ved å bruke Taylorutviklinger.

Oppgave 3 Fikspunktiterasjon

Vi skal studere fikspunktiterasjon med funksjonen $g(x) = x^{k+2} - x^k$ hvor $k \geq 2$ er et gitt heltall. Vis at g har minst to fikspunkter $P_1 < P_2$ med $P_2 \in [1, 2]$. Vil fikspunkt-iterasjon mot P_1 og P_2 konvergere dersom vi starter tilstrekkelig nær? Begrunn svaret.

Oppgave 4 Stykkevis polynominterpolasjon

La $a = x_1 < \cdots < x_N = b$. Gitt verdiene $f_i = f(x_i)$ og estimater m_i for de deriverte $f'(x_i)$, for $i = 1, \ldots, N$, skal vi finne et stykkevis kubisk polynom

(Fortsettes på side 2.)

$S : [a, b] \to \mathbb{R}$ som interpolerer f i punktene $x_1, \ldots, x_N$. Vi krever at

$$\begin{aligned} S(x_i) &= f(x_i), \qquad i = 1, \ldots, N, \\ S'(x_i) &= m_i, \qquad i = 1, \ldots, N, \end{aligned}$$

og at funksjonen S er et kubisk polynom i hvert intervall $[x_i, x_{i+1}]$, for $i = 1, \ldots, N-1$.

4a

Vis at for $x \in [x_i, x_{i+1}]$,

$$S(x) = a_i + b_i(x - x_i) + c_i(x - x_i)^2 + d_i(x - x_i)^2(x - x_{i+1}),$$

hvor $h_i = x_{i+1} - x_i$ og

$$a_i = f_i, \; b_i = m_i, \; c_i = \frac{e_i - m_i}{h_i}, \; d_i = \frac{m_i + m_{i+1} - 2e_i}{h_i^2}, \; e_i = \frac{f_{i+1} - f_i}{h_i}.$$

Hint: Det er nok å vise at

$$S(x_j) = f_j, \quad S'(x_j) = m_j, \qquad j = i, i+1.$$

(du trenger ikke forklare dette).

4b

Innfør variablen $t = x - x_i$ og forklar hvordan vi kan beregne $S(x)$ for en gitt $x \in [x_i, x_{i+1}]$ ved kun tre multiplikasjoner.

4c

Anta at x, f, og m er gitte vektorer med lengde N som inneholder verdiene $x_1, \ldots, x_N$, $f_1, \ldots, f_N$, og $m_1, \ldots, m_N$, og la y være et gitt reelt tall i $[a, b]$. Skriv en MATLAB funksjon som evaluerer S i punktet y, d.v.s. en funksjon som tar x, f, m, og y som input og returnerer $S(y)$.

Lykke til!