UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i	INF-MAT 2350 — Numeriske Beregninger
Eksamensdag:	13 juni 2005
Tid for eksamen:	14.30 – 17.30
Oppgavesettet er på 4 sider.	
Vedlegg:	Ingen
Tillatte hjelpemidler:	ingen

Kontroller at oppgavesettet er komplett før
du begynner å besvare spørsmålene.

Alle 6 delspørsmål vektlegges likt.

Oppgave 1 Numerisk integrasjon

Finn vektene w_0, w_1, og w_2 slik at kvadraturregelen

$$\int_0^1 f(x)\,dx \approx w_0 f(0) + w_1 f'(0) + w_2 f(1),$$

er eksakt for polynomer av grad ≤ 2.

Svar: Hvis regelen er eksakt for polynomene 1, x, og x^2, er den også eksakt for alle polynomer med grad ≤ 2 på grunn av at både integralet og kvadraturregelen er lineære i f. At regelen er eksakt for polynomene 1, x, og x^2 krever at

$$1 = w_0 + w_2, \qquad 1/2 = w_1 + w_2, \qquad 1/3 = w_2.$$

Vis ser da at $w_2 = 1/3$, og videre at $w_0 = 2/3$ og at $w_1 = 1/6$.

Oppgave 2 Numerisk derivasjon

La x_0, x_1, x_2 være reelle tall slik at $x_1 - x_0 = x_2 - x_1 = h$ hvor $h > 0$ og anta at f er en funksjon med tre kontinuerlige deriverte i intervallet $[x_0, x_2]$. Utled et feilestimat for sentraldifferensapproksimasjonen $f'(x_1) \approx (f(x_2) - f(x_0))/(2h)$ ved å bruke Taylorutviklinger.

Svar: Vi har

$$f(x_2) = f(x_1) + hf'(x_1) + \frac{h^2}{2} f''(x_1) + \frac{h^3}{6} f'''(\xi),$$

(Fortsettes på side 2.)

hvor $\xi \in [x_1, x_2]$, og

$$f(x_0) = f(x_1) - hf'(x_1) + \frac{h^2}{2} f''(x_1) - \frac{h^3}{6} f'''(\eta),$$

hvor $\eta \in [x_0, x_1]$. Når vi tar differansen får vi

$$f(x_2) - f(x_0) = 2hf'(x_1) + \frac{h^3}{6}(f'''(\xi) + f'''(\eta)),$$

og på grunn av middelverdisatsen og at f''' er kontuerlig har vi

$$f(x_2) - f(x_0) = 2hf'(x_1) + \frac{h^3}{3} f'''(\mu),$$

hvor $\mu \in [x_0, x_2]$. Dermed har vi

$$\frac{f(x_2) - f(x_0)}{2h} = f'(x_1) + \frac{h^2}{6} f'''(\mu),$$

og

$$\left| \frac{f(x_2) - f(x_0)}{2h} - f'(x_1) \right| \leq \frac{h^2}{6} \max_{x_0 \leq x \leq x_2} |f'''(x)|.$$

Oppgave 3 Fikspunktiterasjon

Vi skal studere fikspunktiterasjon med funksjonen $g(x) = x^{k+2} - x^k$ hvor $k \geq 2$ er et gitt heltall. Vis at g har minst to fikspunkter $P_1 < P_2$ med $P_2 \in [1, 2]$. Vil fikspunkt-iterasjon mot P_1 og P_2 konvergere dersom vi starter tilstrekkelig nær? Begrunn svaret.

Svar: Fikspunktene er løsning av ligningen $f(x) := x^{k+2} - x^k - x = 0$. Vi har $f(0) = 0$ så $P_1 = 0$ er et fikspunkt. Siden $f(1) = -1 < 0$ og $f(2) = 3 \times 2^k - 2 > 0$ og f er kontinuerlig finnes $P_2 \in [1, 2]$ slik at $f(P_2) = 0$.

Vi har $g'(x) = k \times x^{k-1}(\frac{k+2}{k}x^2 - 1)$ og vi ser at $g'(P_1) = 0$ for $k \geq 2$. Siden $|g'(P_1)| < 1$ vil fikspunktiterasjon konvergere til $P_1 = 0$ dersom vi starter tilstrekkelig nær P_1. Siden $|g'(P_2)| > 1$ vil ikke fikspunktiterasjon konvergere til P_2 for noen startvedi $x_0 \neq P_2$.

Oppgave 4 Stykkevis polynominterpolasjon

La $a = x_1 < \cdots < x_N = b$. Gitt verdiene $f_i = f(x_i)$ og estimater m_i for de deriverte $f'(x_i)$, for $i = 1, \ldots, N$, skal vi finne et stykkevis kubisk polynom $S : [a, b] \to \mathbb{R}$ som interpolerer f i punktene $x_1, \ldots, x_N$. Vi krever at

$$\begin{aligned} S(x_i) &= f(x_i), \qquad i = 1, \ldots, N, \\ S'(x_i) &= m_i, \qquad i = 1, \ldots, N, \end{aligned}$$

og at funksjonen S er et kubisk polynom i hvert intervall $[x_i, x_{i+1}]$, for $i = 1, \ldots, N - 1$.

(Fortsettes på side 3.)

4a

Vis at for $x \in [x_i, x_{i+1}]$,

$$S(x) = a_i + b_i(x - x_i) + c_i(x - x_i)^2 + d_i(x - x_i)^2(x - x_{i+1}),$$

hvor $h_i = x_{i+1} - x_i$ og

$$a_i = f_i,\ b_i = m_i,\ c_i = \frac{e_i - m_i}{h_i},\ d_i = \frac{m_i + m_{i+1} - 2e_i}{h_i^2},\ e_i = \frac{f_{i+1} - f_i}{h_i}.$$

Hint: Det er nok å vise at

$$S(x_j) = f_j, \quad S'(x_j) = m_j, \qquad j = i, i+1.$$

(du trenger ikke forklare dette).

Svar: Vi finner

$$S'(x) = b_i + 2c_i(x - x_i) + d_i\big(2(x - x_i)(x - x_{i+1}) + (x - x_i)^2\big)$$

slik at

$$\begin{aligned} S(x_i) &= a_i = f_i, & S(x_{i+1}) &= a_i + b_i h_i + c_i h_i^2 = f_{i+1}, \\ S'(x_i) &= b_i = m_i, & S'(x_{i+1}) &= b_i + 2c_i h_i + d_i h_i^2 = m_{i+1}. \end{aligned}$$

4b

Innfør variablen $t = x - x_i$ og forklar hvordan vi kan beregne $S(x)$ for en gitt $x \in [x_i, x_{i+1}]$ ved kun tre multiplikasjoner.

Svar:

$$\begin{aligned} S(x) &= a_i + b_i t + c_i t^2 + d_i t^2(t - h) \\ &= (d_i * (t - h) + c_i) * t + b_i) * t + a_i. \end{aligned}$$

4c

Anta at x, f, og m er gitte vektorer med lengde N som inneholder verdiene $x_1, \ldots, x_N$, $f_1, \ldots, f_N$, og $m_1, \ldots, m_N$, og la y være et gitt reelt tall i $[a, b]$. Skriv en MATLAB funksjon som evaluerer S i punktet y, d.v.s. en funksjon som tar x, f, m, og y som input og returnerer $S(y)$.

Svar:

```
  function sVal = splineEval(x,f,m,y)
% sVal = splineEval(x,f,m,y)
% Evaluates a cubic spline S at the point y in [a,b] where:
% x is an N-vector containing a = x_1 < x_2 < ... < x_N = b,
% f is an N-vector containing f_1, f_2,..., f_N
% m is an N-vector containing m_1, m_2,..., m_N,
```

(Fortsettes på side 4.)

```
% and in the interval [x_k,x_{k+1}]$, $S$ is
% the cubic polynomial such that
% S(x_k) = f_k, S(x_{k+1}) = f_{k+1},
% S'(x_k) = m_k, S'(x_{k+1}) = m_{k+1}.

% Find index k such that x(k) <= y <= x(k+1).
% Assume that x(1) <= y <= x(N).
  k = 1;
  while y > x(k+1)
     k = k + 1;
  end

% Evaluate h_k, a_k, b_k, c_k and d_k.

  h = x(k+1) - x(k);
  a = f(k);
  b = m(k);
  e = (f(k+1) - f(k))/h;
  c = (e - m(k)) / h;
  d = (m(k) + m(k+1) - 2 * e) / (h * h);

% Evaluate S using Horners rule.

  t = y - x(k);

  sVal =  d;
  sVal =  sVal * (t - h) + c;
  sVal =  sVal * t + b;
  sVal =  sVal * t + a;
```

Lykke til!