UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i	INF-MAT 2350 — Numeriske Beregninger
Eksamensdag:	13 juni 2006
Tid for eksamen:	1430 – 1730
Oppgavesettet er på 2 sider.	
Vedlegg:	Ingen
Tillatte hjelpemidler:	ingen

Kontroller at oppgavesettet er komplett før
du begynner å besvare spørsmålene.

Alle 6 delspørsmål vektlegges likt.

Oppgave 1 Numerisk integrasjon

La $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ være en integrerbar funksjon og anta at vi kjenner $f(-1)$, $f'(-1)$, og $f(0)$. Bestem a, b, c slik at regelen

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx \approx af(-1) + bf'(-1) + cf(0)$$

er eksakt for polynomer av grad ≤ 2.

Oppgave 2 Feil i interpolasjon

I denne oppgaven trenger du formelen for interpolasjon med feilledd på formen $\phi(x) = P_N(x) + E_N(x)$ hvor

$$E_N(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_N)\phi^{(N+1)}(c)}{(N+1)!}.$$

Her er P_N polynomet av grad $\leq N$ som interpolerer den gitte funksjonen ϕ i distinkte punkter $x_0, x_1, \ldots, x_N$ i et intervall $[a, b]$, $\phi \in C^{n+1}[a, b]$ og c er et punkt i $[a, b]$.

La f være en funksjon med fire kontinuerlige deriverte på et intervall $I = [-2h, 2h]$, hvor $h > 0$ er gitt. La $p(x)$ være polynomet av grad ≤ 3 slik at $p(jh) = f(jh)$ for $j = -2, -1, 1, 2$.

Vis at for $x \in [-h, h]$ gjelder begrensningen

$$\big|f(x) - p(x)\big| \leq \frac{1}{6}h^4 M_4, \quad \text{hvor} \quad M_4 = \max_{x \in I} \big|f^{(4)}(x)\big|.$$

(Fortsettes på side 2.)

Oppgave 3 Finne minimum av en funksjon

La $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ være en unimodal funksjon, d.v.s, at det finnes et punkt t_* i (a, b) slik at f er strengt monotont avtagende på $[a, t_*]$ og strengt monotont voksende på $[t_*, b]$.

Vi betrakter følgende metode for å finne minimumet t_*. For $k = 0, 1, 2, \ldots$, genererer vi fire følger (a_k), (b_k), (c_k), (d_k). Her er

$$c_k = a_k + (1 - r)(b_k - a_k), \qquad d_k = b_k - (1 - r)(b_k - a_k),$$

hvor $r \in (1/2, 1)$ er en parameter vi kan velge.

Vi lar $a_0 = a$ og $b_0 = b$. For hver $k \geq 0$, definerer vi $a_{k+1} = a_k$ og $b_{k+1} = d_k$ dersom $f(c_k) \leq f(d_k)$ og $a_{k+1} = c_k$ og $b_{k+1} = b_k$ ellers.

3a

Bestem a_1 og b_1 når $[a, b] = [0, 1]$ og $f(x) = 4/9 + (x - 1/3)^2$ og $r = 3/4$.

3b

Skriv en matlabfunksjon

```
function [an,bn] = search(fname,a,b,r,n)
```

som gitt a, b med $a < b$, $n \geq 1$, $r \in (1/2, 1)$ og en unimodal funksjon `fname` på $[a, b]$, beregner `an` $= a_n$ og `bn` $= b_n$ som beskrevet ovenfor.

3c

For vilkårlig r i $(1/2, 1)$ er det to funksjonsevalueringer per iterasjon. Med et lurt valg av r kan vi reduserer dette til en. Hvis for eksempel $f(c_k) \leq f(d_k)$ kan vi få dette til ved å kreve at $d_{k+1} = c_k$. Finn r.

Oppgave 4 Initialverdiproblem

I denne oppgaven skal vi bruke den modifiserte Euler-Cauchy metoden

$$y_{j+1} = y_j + hf\big(t_j + \frac{h}{2}, y_j + \frac{h}{2} f(t_j, y_j)\big), j = 0, 1, 2, \ldots. \tag{1}$$

for å løse initialverdiproblemet

$$y' = f(t, y), \quad y(a) = y_0$$

på intervallet $[a, b]$. Her er $t_j = a + j \cdot h$, $h = (b - a)/M$ og M er et positivt heltall. Skriv en Matlab funksjon

```
Y=mec(f,a,b,y0,M)
```

som beregner en vektor $Y \in \mathbb{R}^{M+1}$ av tilnærmede løsninger i punktene t_j for $j = 0, 1, \ldots, M$ ved hjelp av (1). Bruk matlabfunksjonen `feval` for å evaluere funksjonen f.

Lykke til!