UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i	INF-MAT 2350 — Numeriske Beregninger
Eksamensdag:	13 juni 2006
Tid for eksamen:	1430 – 1730
Oppgavesettet er på 4 sider.	
Vedlegg:	Ingen
Tillatte hjelpemidler:	ingen

Kontroller at oppgavesettet er komplett før
du begynner å besvare spørsmålene.

Alle 6 delspørsmål vektlegges likt.

Oppgave 1 Numerisk integrasjon

La $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ være en integrerbar funksjon og anta at vi kjenner $f(-1)$, $f'(-1)$, og $f(0)$. Bestem a, b, c slik at regelen

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx \approx af(-1) + bf'(-1) + cf(0)$$

er eksakt for polynomer av grad ≤ 2.

Svar:

På grunn av linearitet er det nok å vise at regelen er eksakt for polynomene 1, x, x^2. Det gir ligningssystemet

$$\begin{aligned} a + c &= 2, \\ -a + b &= 0, \\ a - 2b &= 2/3. \end{aligned}$$

Løsningen er $a = b = -2/3$ og $c = 8/3$.

Oppgave 2 Feil i interpolasjon

I denne oppgaven trenger du formelen for interpolasjon med feilledd på formen $\phi(x) = P_N(x) + E_N(x)$ hvor

$$E_N(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_N)\phi^{(N+1)}(c)}{(N+1)!}.$$

(Fortsettes på side 2.)

Her er P_N polynomet av grad $\leq N$ som interpolerer den gitte funksjonen ϕ i distinkte punkter $x_0, x_1, \ldots, x_N$ i et intervall $[a,b]$, $\phi \in C^{n+1}[a,b]$ og c er et punkt i $[a,b]$.

La f være en funksjon med fire kontinuerlige deriverte på et intervall $I = [-2h, 2h]$, hvor $h > 0$ er gitt. La $p(x)$ være polynomet av grad ≤ 3 slik at $p(jh) = f(jh)$ for $j = -2, -1, 1, 2$.

Vis at for $x \in [-h, h]$ gjelder begrensningen

$$\left|f(x) - p(x)\right| \leq \frac{1}{6} h^4 M_4, \quad \text{hvor} \quad M_4 = \max_{x \in I} \left|f^{(4)}(x)\right|.$$

Svar: Feilleddet er i vårt tilfelle

$$f(x) - p(x) = \frac{1}{4!} f^{(4)}(c)(x+2h)(x+h)(x-h)(x-2h).$$

Hvis $x \in I$ er $c \in I$. La

$$w(x) = (x+2h)(x+h)(x-h)(x-2h) = (x^2-4h^2)(x^2-h^2) = x^4 - 5h^2x^2 + 4h^4.$$

Da er

$$|f(x) - p(x)| \leq \frac{1}{4!} \max_{x \in [-h,h]} |w(x)| M_4. \tag{1}$$

Maks av $|w(x)|$ oppnås enten i endepunktene av intervallet $[-h, h]$ eller i et punkt $x \in (-h, h)$ hvor $w'(x) = 0$. Vi har $w'(x) = 4x^3 - 10h^2x$. Det eneste punkt i $(-h, h)$ hvor $w'(x) = 0$ er $x = 0$. Det gir

$$\max_{x \in [-h,h]} |w(x)| = \max\{|w(-h)|, |w(0)|, |w(h)|\} = |w(0)| = 4h^2.$$

Setter vi dette inn i (1) får vi

$$\left|f(x) - p(x)\right| \leq \frac{1}{6} h^4 M_4.$$

Oppgave 3 Finne minimum av en funksjon

La $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ være en unimodal funksjon, d.v.s, at det finnes et punkt t_* i (a, b) slik at f er strengt monotont avtagende på $[a, t_*]$ og strengt monotont voksende på $[t_*, b]$.

Vi betrakter følgende metode for å finne minimumet t_*. For $k = 0, 1, 2, \ldots$, genererer vi fire følger (a_k), (b_k), (c_k), (d_k). Her er

$$c_k = a_k + (1-r)(b_k - a_k), \qquad d_k = b_k - (1-r)(b_k - a_k),$$

hvor $r \in (1/2, 1)$ er en parameter vi kan velge.

Vi lar $a_0 = a$ og $b_0 = b$. For hver $k \geq 0$, definerer vi $a_{k+1} = a_k$ og $b_{k+1} = d_k$ dersom $f(c_k) \leq f(d_k)$ og $a_{k+1} = c_k$ og $b_{k+1} = b_k$ ellers.

(Fortsettes på side 3.)

3a

Bestem a_1 og b_1 når $[a,b]=[0,1]$ og $f(x)=4/9+(x-1/3)^2$ og $r=3/4$.

Svar: Siden $a_0 = 0$ og $b_0 = 1$ finner vi $c_0 = 1/4$ og $d_0 = 3/4$. Da er $f(c_0)=65/144$ som er mindre enn $f(d_0)=89/144$. Derfor er $a_1=a_0=0$ og $b_1=d_0=3/4$.

3b

Skriv en matlabfunksjon

```
function [an,bn] = search(fname,a,b,r,n)
```

som gitt a, b med $a<b$, $n\geq 1$, $r\in(1/2,1)$ og en unimodal funksjon `fname` på $[a,b]$, beregner `an` $=a_n$ og `bn` $=b_n$ som beskrevet ovenfor.

Svar:

```
function [an,bn] = search(fname,a,b,r,n)
for k=1:n
  c = a + (1 - r) * (b - a);
  d = b - (1 - r) * (b - a);
  fc = feval(fname,c);
  fd = feval(fname,d);
  if fc <= fd
    b = d;
  else
    a = c;
  end
end
an = a; bn = b;
```

3c

For vilkårlig r i $(1/2,1)$ er det to funksjonsevalueringer per iterasjon. Med et lurt valg av r kan vi reduserer dette til en. Hvis for eksempel $f(c_k)\leq f(d_k)$ kan vi få dette til ved å kreve at $d_{k+1}=c_k$. Finn r.

Svar: I tilfellet $f(c_k)\leq f(d_k)$ har vi $a_{k+1}=a_k$ og $b_{k+1}=d_k$. Da er

$$\begin{aligned}d_{k+1} &= b_{k+1}-(1-r)(b_{k+1}-a_{k+1}) = a_{k+1}+r(b_{k+1}-a_{k+1})\\ &= a_k + r(d_k-a_k) = a_k + r^2(b_k-a_k).\end{aligned}$$

Siden

$$c_k = a_k + (1-r)(b_k-a_k),$$

får vi

$$1-r=r^2.$$

Den eneste løsningen i $(1/2,1)$ er $r=(\sqrt{5}-1)/2$.

(Fortsettes på side 4.)

Oppgave 4 Initialverdiproblem

I denne oppgaven skal vi bruke den modifiserte Euler-Cauchy metoden

$$y_{j+1} = y_j + hf\big(t_j + \frac{h}{2}, y_j + \frac{h}{2}f(t_j, y_j)\big), j = 0, 1, 2, \ldots. \quad (2)$$

for å løse initialverdiproblemet

$$y' = f(t, y), \quad y(a) = y_0$$

på intervallet $[a, b]$. Her er $t_j = a + j \cdot h$, $h = (b - a)/M$ og M er et positivt heltall. Skriv en Matlab funksjon

`Y=mec(f,a,b,y0,M)`

som beregner en vektor $Y \in \mathbb{R}^{M+1}$ av tilnærmede løsninger i punktene t_j for $j = 0, 1, \ldots, M$ ved hjelp av (2). Bruk matlabfunksjonen `feval` for å evaluere funksjonen f.

Svar:

```
function Y=mec(f,a,b,y0,M)}
%Input -f er funksjonen som  kalles som en tekststreng 'f'
%      -a og b er venstre og høyre endepunkt
%      -y0 er initialbetingelsen
%      -M er antall skritt
%Output-Y=[y0, y1,...,yM] er vektoren av tilnærmede løsninger
h=(b-a)/M;
Y=zeros(1,M+1);
Y(1) = y0;
for j=1:M
   t=a+j*h;
   k1=feval(f,t,Y(j));
   k2=feval(f,t+h/2,Y(j)+h*k1/2);
   Y(j+1)=Y(j)+h*k2;
end
```

Lykke til!