

MAT 3360: Eksamen, våren 2020

Innleveringsfrist: Fredag 12. juni, kl. 14:30

Du må levere én og bare én (.pdf) fil. For å bestå kreves en score på minst 40% der hvert spørsmål (a), b) osv.) teller 10%.

Oppgave 1. Sett

$$f(x) = x(1 - x^2).$$

a) Finn Fourier sinusrekka til f på intervallet $[0, 1]$.

Mulig svar: Vi har at $f \sim \sum_k b_k \sin(k\pi x)$ der

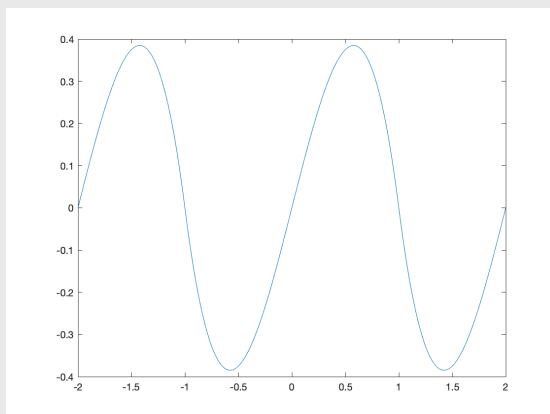
$$\begin{aligned} b_k &= 2 \int_0^1 x(1 - x^2) \sin(k\pi x) dx \\ &= \frac{2}{k\pi} \int_0^1 (1 - 3x^2) \cos(k\pi x) dx \\ &= \frac{2}{(k\pi)^2} \int_0^1 6x \sin(k\pi x) dx \\ &= -\frac{12}{(k\pi)^3} x \cos(k\pi x) \Big|_{x=0}^{x=1} + \frac{12}{(k\pi)^3} \int_0^1 \cos(k\pi x) dx \\ &= \frac{12}{(k\pi)^3} (-1)^{k+1}. \end{aligned}$$

Derfor har vi at

$$f(x) \sim \frac{12}{\pi^3} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k^3} \sin(k\pi x).$$

b) La $S(x)$ betegne summen av Fourierrekka. Skisser grafen til S for $x \in [-2, 2]$.

Mulig svar: Vi vet at $S(x)$ blir den odde periodiske utvidelsen til f . Grafen ser slik ut:



c) Vis at

$$\pi^6 = 945 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^6}.$$

Mulig svar: For å få tallene $1/k^6 = 1/(k^3)^2$ kan vi bruke Parsevals likhet (som gjelder siden f er kontinuerlig)

$$2 \|f\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} b_k^2.$$

Vi må regne ut $2 \|f\|^2$,

$$\begin{aligned} 2 \|f\|^2 &= 2 \int_0^1 x^2(1-x^2)^2 dx \\ &= 2 \int_0^1 x^2 - 2x^4 + x^6 dx \\ &= 2 \left(\frac{1}{3} - \frac{2}{5} + \frac{1}{7} \right) \\ &= \frac{16}{105}. \end{aligned}$$

Da sier Parsevals likhet at

$$\frac{16}{105} = \frac{12^2}{\pi^6} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^6} \text{ mao. } \pi^6 = 945 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^6}.$$

Oppgave 2. Betrakt initialverdiproblemet

$$(1) \quad \begin{cases} u_t + \cos^2(x)u_x = 0, & t > 0, \quad x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}), \\ u(x, 0) = f(x), \end{cases}$$

der f er en gitt kontinuerlig deriverbar funksjon. Vi antar at u er en kontinuerlig deriverbar (i både x og t) funksjon.

a) Sett

$$E(t) = \frac{1}{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (u(x, t))^2 dx.$$

Vis at $E'(t) \leq 2E(t)$ og dermed at $E(t) \leq E(0)e^{2t}$.

Mulig svar: Vi regner

$$\begin{aligned} E'(t) &= \frac{1}{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 2u_t u dx \\ &= - \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(x) u u_x dx \\ &= -\frac{1}{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(x) (u^2)_x dx \\ &= -\frac{1}{2} \cos^2(x) u^2(x, t) \Big|_{x=-\frac{\pi}{2}}^{x=\frac{\pi}{2}} - \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 2 \cos(x) \sin(x) u^2 dx \\ &= - \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin(2x) u^2 dx. \end{aligned}$$

Derfor blir

$$E'(t) \leq \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} |\sin(2x)| u^2 dx \leq 2E(t),$$

og svaret følger ved bruk av Gronwalls ulikhet.

b) Forklar hvorfor a) impliserer at (1) kan ha høyst én kontinuerlig deriverbar løsning.

Mulig svar: Anta vi har to løsninger u og v , sett $w = u - v$. Ligningen er lineær, så w blir en løsning på (1) med $f = 0$. Da får vi at

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} w^2(x, t) dx \leq \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 0^2 dx e^{2t} = 0,$$

så $w(x, t) = 0$.

c) Bruk karakteristikkmetoden til å finne en formel for løsningen på (1) gitt funksjonen f .

Mulig svar: Karakteristikkene er gitt ved

$$X'(t) = \cos^2(X(t)), \quad X(0) = x_0.$$

Dette er en separabel ligning,

$$\frac{X'(t)}{\cos^2(X(t))} = \frac{d}{dt} \tan(X(t)) = 1.$$

Vi integrerer fra $t = 0$ til $t = t$ og får

$$\tan(X) - \tan(x_0) = t, \quad \text{mao. } x_0 = \arctan(\tan(X) - t).$$

Generellt vet vi at

$$u(X(t), t) = f(x_0) \quad \text{mao. } u(x, t) = f(\arctan(\tan(x) - t)).$$

Oppgave 3. Betrakt randverdiproblemet

$$(2) \quad \begin{cases} \Delta u = 0, & 1 < r < 2, \\ u(1, \theta) = 0, & u(2, \theta) = \sin(\theta). \end{cases}$$

Her er (r, θ) polarkoordinater og Laplaceoperatoren Δ er gitt ved

$$\Delta u = u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\theta\theta}.$$

Du skal ikke vise dette.

a) Bruk separasjon av variable til å finne løsningen $u(r, \theta)$.

Mulig svar: Vi gjetter på en løsning $u = R\Theta$, setter så inn i $\Delta u = 0$ og får

$$R''\Theta + \frac{1}{r}R'\Theta + \frac{1}{r^2}R\Theta'' = 0,$$

som omskrives som

$$\frac{r^2R'' + rR'}{R} = -\frac{\Theta''}{\Theta}.$$

Ved det vanlige resonnementet må dette bli konstant, så Θ må være en 2π -periodisk funksjon av θ som tilfredstiller

$$\Theta'' = -\lambda\Theta.$$

Dette impliserer at $\lambda = k^2$ for $k = 0, 1, 2, \dots$ og at

$$\Theta = \Theta_k(\theta) = a \cos(k\theta) + b \sin(k\theta).$$

Nå blir R -ligningen

$$r^2R'' + rR' - k^2R = 0.$$

Vi gjetter på en løsning $R = r^\sigma$, ved innsetting så får vi at

$$R = R_k(r) = \alpha r^k + \beta r^{-k},$$

slik at

$$u(r, \theta) = (\alpha r^k + \beta r^{-k}) (a \cos(k\theta) + b \sin(k\theta))$$

Nå gir $u(1, \theta) = 0$ at $\alpha = -\beta$, og $u(2, \theta) = \sin(\theta)$ gir at

$$(2^k - 2^{-k})(a \cos(k\theta) + b \sin(k\theta)) = \sin(\theta).$$

Dette gir likhet hvis $k = 1$, $a = 0$ og $b = 2/3$, altså

$$u(r, \theta) = \frac{2}{3} \left(r - \frac{1}{r} \right) \sin(\theta).$$

b) Finn løsningen på randverdiproblemet

$$(3) \quad \begin{cases} \Delta v = 0, & 1 < r < 2, \\ v(1, \theta) = \cos(2\theta), & v(2, \theta) = 0. \end{cases}$$

Mulig svar: Separasjon gir samme løsning som i forrige punkt, nå gir randbetingelsen $v(2, \theta) = 0$ at

$$\beta = -2^{2k} \alpha$$

slik at

$$u(r, \theta) = (r^k - 2^{2k} r^{-k})(a \cos(k\theta) + b \sin(k\theta)).$$

Randbetingelsen $v(1, \theta) = \cos(2\theta)$ blir

$$(1 - 2^{2k})(a \cos(k\theta) + b \sin(k\theta)) = \cos(2\theta),$$

og vi får likhet hvis $k = 2$, $b = 0$ og $a = -1/15$, mao.

$$v(r, \theta) = -\frac{1}{15} \left(r^2 - \frac{16}{r^2} \right) \cos(2\theta).$$

c) Finn løsningen på randverdiproblemet

$$(4) \quad \begin{cases} \Delta w = 0, & 1 < r < 2, \\ w(1, \theta) = \cos(2\theta), & w(2, \theta) = \sin(\theta). \end{cases}$$

Mulig svar: Vi ser at $w = u + v$ blir en løsning.

Oppgave 4. Vi skal se på Crank-Nicholson skjemaet for varmeligningen

$$\begin{cases} u_t = u_{xx}, & t > 0, \quad x \in (0, 1), \\ u(0, t) = u(1, t) = 0, & t > 0, \\ u(x, 0) = f(x). \end{cases}$$

Dette skjemaet kan skrives

$$\frac{v_j^{m+1} - v_j^m}{\Delta t} - \frac{1}{\Delta x^2} D^+ D^- v_j^{m+1/2} = 0, \quad j = 1, \dots, n,$$

med $v_0^m = v_{n+1}^m = 0$, der $\Delta x = 1/(n+1)$ og

$$v_j^{m+1/2} := \frac{1}{2} (v_j^{m+1} + v_j^m),$$

samt at differensene D^+ og D^- er gitt ved

$$D^+ a_j = a_{j+1} - a_j, \quad D^- a_j = a_j - a_{j-1}.$$

Definér den diskrete energien E^m som

$$E^m = \frac{1}{2} \Delta x \sum_{j=1}^n (v_j^m)^2.$$

Vis at $E^{m+1} \leq E^m$ for $m \geq 0$. (**Hint:** Multipliser skjemaet med $v_j^{m+1/2}$ og summér over j .)

Mulig svar: Vi følger hintet,

$$\begin{aligned} & \sum_j \frac{1}{2} (v_j^{m+1} + v_j^m) (v_j^{m+1} - v_j^m) - \mu \sum_j v_j^{m+1/2} D^+ D^- v_j^{m+1/2} \\ &= \frac{1}{2} \sum_j \left[(v_j^{m+1})^2 - (v_j^m)^2 \right] + \mu \sum_j \left(D^- v_j^{m+1/2} \right)^2 = 0, \end{aligned}$$

der $\mu = \Delta t / \Delta x^2$. Det siste leddet er positivt og derfor er $E^{m+1} \leq E^m$.