MAT 3360: Eksamen, våren 2020

Innleveringsfrist: Fredag 12. juni, kl. 14:30

Du må levere én og bare én (.pdf) fil. For å bestå kreves en score på minst 40% der hvert spørsmål (**a**), **b)** osv.) teller 10%.

Oppgave 1. Sett

$$f(x) = x(1 - x^2).$$

a) Finn Fourier sinusrekka til f på intervallet $[0, 1]$.

Mulig svar: Vi har at $f \sim \sum_k b_k \sin(k\pi x)$ der

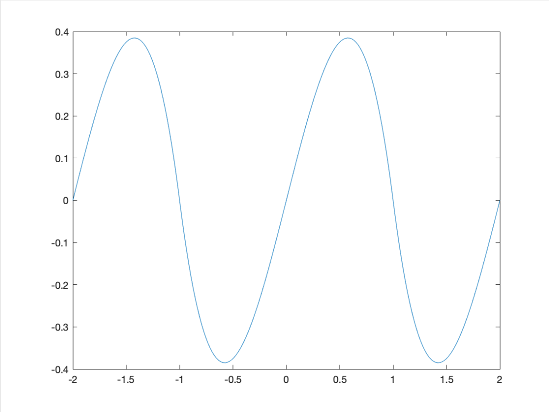
$$\begin{aligned}
b_k &= 2\int_0^1 x(1-x^2)\sin(k\pi x)\,dx \\
&= \frac{2}{k\pi}\int_0^1 (1-3x^2)\cos(k\pi x)\,dx \\
&= \frac{2}{(k\pi)^2}\int_0^1 6x\sin(k\pi x)\,dx \\
&= -\frac{12}{(k\pi)^3}x\cos(k\pi x)\ \Big|_{x=0}^{x=1} + \frac{12}{(k\pi)^3}\int_0^1 \cos(k\pi x)\,dx \\
&= \frac{12}{(k\pi)^3}(-1)^{k+1}.
\end{aligned}$$

Derfor har vi at

$$f(x) \sim \frac{12}{\pi^3}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{k^3}\sin(k\pi x).$$

b) La $S(x)$ betegne summen av Fourierrekka. Skisser grafen til S for $x \in [-2, 2]$.

Mulig svar: Vi vet at $S(x)$ blir den odde periodiske utvidelsen til f. Grafen ser slik ut:



c) Vis at

$$\pi^6 = 945 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^6}.$$

Mulig svar: For å få tallene $1/k^6 = 1/(k^3)^2$ kan vi bruke Parsevals likhet (som gjelder siden f er kontinuerlig)

$$2\,\|f\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} b_k^2.$$

Vi må regne ut $2\,\|f\|^2$,

$$\begin{aligned} 2\,\|f\|^2 &= 2\int_0^1 x^2(1-x^2)^2\,dx \\ &= 2\int_0^1 x^2 - 2x^4 + x^6\,dx \\ &= 2\Big(\frac{1}{3} - \frac{2}{5} + \frac{1}{7}\Big) \\ &= \frac{16}{105}. \end{aligned}$$

Da sier Parsevals likhet at

$$\frac{16}{105} = \frac{12^2}{\pi^6} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^6} \text{ mao. } \pi^6 = 945 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^6}.$$

Oppgave 2. Betrakt initialverdiproblemet

$$\begin{cases} u_t + \cos^2(x) u_x = 0, \quad t > 0, \quad x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}), \\ u(x,0) = f(x), \end{cases} \tag{1}$$

der f er en gitt kontinuerlig deriverbar funksjon. Vi antar at u er en kontinuerlig deriverbar (i både x og t) funksjon.

a) Sett

$$E(t) = \frac{1}{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (u(x,t))^2 \, dx.$$

Vis at $E'(t) \leq 2E(t)$ og dermed at $E(t) \leq E(0)e^{2t}$.

Mulig svar: Vi regner

$$\begin{aligned} E'(t) &= \frac{1}{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 2u_t u \, dx \\ &= -\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(x) u u_x \, dx \\ &= -\frac{1}{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(x) (u^2)_x \, dx \\ &= -\frac{1}{2} \cos^2(x) u^2(x,t) \Big|_{x=-\frac{\pi}{2}}^{x=\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 2\cos(x)\sin(x) u^2 \, dx \\ &= -\frac{1}{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin(2x) u^2 \, dx. \end{aligned}$$

Derfor blir

$$E'(t) \leq \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} |\sin(2x)| \, u^2 \, dx \leq 2E(t),$$

og svaret følger ved bruk av Gronwalls ulikhet.

b) Forklar hvorfor **a)** impliserer at (1) kan ha høyst én kontinuerlig deriverbar løsning.

Mulig svar: Anta vi har to løsninger u og v, sett $w = u - v$. Ligningen er lineær, så w blir en løsning på (1) med $f = 0$. Da får vi at

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} w^2(x,t) \, dx \leq \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 0^2 \, dx e^{2t} = 0,$$

så $w(x,t) = 0$.

c) Bruk karakteristikkmetoden til å finne en formel for løsningen på (1) gitt funksjonen f.

Mulig svar: Karakteristikkene er gitt ved
$$X'(t) = \cos^2(X(t)), \quad X(0) = x_0.$$
Dette er en separabel ligning,
$$\frac{X'(t)}{\cos^2(X(t))} = \frac{d}{dt}\tan(X(t)) = 1.$$
Vi integrerer fra $t = 0$ til $t = t$ og får
$$\tan(X) - \tan(x_0) = t, \quad \text{mao.} \quad x_0 = \arctan(\tan(X) - t).$$
Generellt vet vi at
$$u(X(t), t) = f(x_0) \quad \text{mao.} \quad u(x, t) = f(\arctan(\tan(x) - t)).$$

Oppgave 3. Betrakt randverdiproblemet

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & 1 < r < 2, \\ u(1, \theta) = 0, & u(2, \theta) = \sin(\theta). \end{cases} \tag{2}$$

Her er (r, θ) polarkoordinater og Laplaceoperatoren Δ er gitt ved
$$\Delta u = u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\theta\theta}.$$
Du skal ikke vise dette.

a) Bruk separasjon av variable til å finne løsningen $u(r, \theta)$.

Mulig svar: Vi gjetter på en løsning $u = R\Theta$, setter så inn i $\Delta u = 0$ og får
$$R''\Theta + \frac{1}{r}R'\Theta + \frac{1}{r^2}R\Theta'' = 0,$$
som omskrives som
$$\frac{r^2R'' + rR'}{R} = -\frac{\Theta''}{\Theta}.$$
Ved det vanlige ressonementet må dette bli konstant, så Θ må være en 2π-periodisk funksjon av θ som tilfredstiller
$$\Theta'' = -\lambda\Theta.$$
Dette impliserer at $\lambda = k^2$ for $k = 0, 1, 2, \ldots$ og at
$$\Theta = \Theta_k(\theta) = a\cos(k\theta) + b\sin(k\theta).$$
Nå blir R-ligningen
$$r^2R'' + rR' - k^2R = 0.$$

Vi gjetter på en løsning $R = r^\sigma$, ved innsetting så får vi at

$$R = R_k(r) = \alpha r^k + \beta r^{-k},$$

slik at

$$u(r,\theta) = \left(\alpha r^k + \beta r^{-k}\right)\left(a\cos(k\theta) + b\sin(k\theta)\right)$$

Nå gir $u(1,\theta) = 0$ at $\alpha = -\beta$, og $u(2,\theta) = \sin(\theta)$ gir at

$$(2^k - 2^{-k})(a\cos(k\theta) + b\sin(k\theta)) = \sin(\theta).$$

Dette gir likhet hvis $k = 1$, $a = 0$ og $b = 2/3$, altså

$$u(r,\theta) = \frac{2}{3}\left(r - \frac{1}{r}\right)\sin(\theta).$$

b) Finn løsningen på randverdiproblemet

$$\begin{cases} \Delta v = 0, \quad 1 < r < 2, \\ v(1,\theta) = \cos(2\theta), \quad v(2,\theta) = 0. \end{cases} \tag{3}$$

Mulig svar: Separasjon gir samme løsning som i forrige punkt, nå gir randbetingelsen $v(2,\theta) = 0$ at

$$\beta = -2^{2k}\alpha$$

slik at

$$u(r,\theta) = (r^k - 2^{2k}r^{-k})(a\cos(k\theta) + b\sin(k\theta)).$$

Randbetingelsen $v(1,\theta) = \cos(2\theta)$ blir

$$(1 - 2^{2k})(a\cos(k\theta) + b\sin(k\theta)) = \cos(2\theta),$$

og vi får likhet hvis $k = 2$, $b = 0$ og $a = -1/15$, mao.

$$v(r,\theta) = -\frac{1}{15}\left(r^2 - \frac{16}{r^2}\right)\cos(2\theta).$$

c) Finn løsningen på randverdiproblemet

$$\begin{cases} \Delta w = 0, \quad 1 < r < 2, \\ w(1,\theta) = \cos(2\theta), \quad w(2,\theta) = \sin(\theta). \end{cases} \tag{4}$$

Mulig svar: Vi ser at $w = u + v$ blir en løsning.

Oppgave 4. Vi skal se på Crank-Nicholson skjemaet for varmeligningen

$$\begin{cases} u_t = u_{xx}, \ t > 0, \ x \in (0,1), \\ u(0,t) = u(1,t) = 0, \ t > 0, \\ u(x,0) = f(x). \end{cases}$$

Dette skjemaet kan skrives

$$\frac{v_j^{m+1} - v_j^m}{\Delta t} - \frac{1}{\Delta x^2} D^+ D^- v_j^{m+1/2} = 0, \quad j = 1, \ldots, n,$$

med $v_0^m = v_{n+1}^m = 0$, der $\Delta x = 1/(n+1)$ og

$$v_j^{m+1/2} := \frac{1}{2}\left(v_j^{m+1} + v_j^m\right),$$

samt at differensene D^+ og D^- er gitt ved

$$D^+ a_j = a_{j+1} - a_j, \quad D^- a_j = a_j - a_{j-1}.$$

Definér den diskrete energien E^m som

$$E^m = \frac{1}{2} \Delta x \sum_{j=1}^{n} \left(v_j^m\right)^2.$$

Vis at $E^{m+1} \le E^m$ for $m \ge 0$. (**Hint**: Multipliser skjemaet med $v_j^{m+1/2}$ og summér over j.)

Mulig svar: Vi følger hintet,

$$\sum_j \frac{1}{2}(v_j^{m+1} + v_j^m)(v_j^{m+1} - v_j^m) - \mu \sum_j v_j^{m+1/2} D^+ D^- v_j^{m+1/2}$$
$$= \frac{1}{2} \sum_j \left[\left(v_j^{m+1}\right)^2 - \left(v_j^m\right)^2 \right] + \mu \sum_j \left(D^- v_j^{m+1/2} \right)^2 = 0,$$

der $\mu = \Delta t / \Delta x^2$. Det siste leddet er positivt og derfor er $E^{m+1} \le E^m$.