UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i	MAT3360 — Introduksjon til partielle differensialligninger
Eksamensdag:	Onsdag, 7. juni, 2022
Tid for eksamen:	15:00 – 19:00
Oppgavesettet er på 5 sider.	
Vedlegg:	Ingen.
Tillatte hjelpemidler:	Ingen

Kontroller at oppgavesettet er komplett før
du begynner å besvare spørsmålene.

Oppgave 1

Betrakt differensialligningen

$$\begin{cases} \cosh(x)u_t + \cos(t)u_x = 0, & t > 0, \\ u(x,0) = f(x), \end{cases} \quad x \in \mathbb{R},$$

der f er en gitt kontinuerlig deriverbar funksjon.

1a

Finn en formel (som inneholder f) for løsningen på dette initialverdiproblemet.

Løsningsforslag: La X tilfredsstille den karakteristiske ligningen

$$X'(t) = \frac{\cos(t)}{\cosh(X(t))}, \quad X(0) = x_0,$$

med løsning

$$\sinh(X(t)) - \sinh(x_0) = \sin(t), \text{ mao. } x_0 = \operatorname{arcsinh}(\sinh(X(t)) - \sin(t)).$$

Løsnningen er gitt ved $u(X(t),t) = f(x_0)$, altså

$$u(x,t) = f\left(\operatorname{arcsinh}(\sinh(x) - \sin(t))\right).$$

1b

Bruk et energiestimat til å vise at initialverdiproblemet har høyst en deriverbar løsning u som er slik at $\lim_{x\to-\infty} u(x,t) = \lim_{x\to\infty} u(x,t) = 0$. (Hint: Multipliser ligningen med u og integrer over x.)

(Fortsettes på side 2.)

Løsningsforslag: Vi følger hintet og får

$$\frac{d}{dt}\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{2}\cosh(x)u^2\,dx = -\cos(t)\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{2}\left(u^2\right)_x\,dx = 0.$$

Dersom $f(x) = 0$ blir $u = 0$ og vi har entydighet.

Oppgave 2

Vi skal studere bølgeligningen

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = \alpha u, & t > 0,\ x \in (0,1), \\ u(0,t) = u(1,t) = 0, \\ u(x,0) = f(x),\ u_t(x,0) = g(x), \end{cases} \tag{1}$$

der α er et reellt tall.

2a

Finn en formell løsning på (1) dersom $f(x) = 0$ og $g(x) = 1$ og $\alpha < \pi^2$.

Løsningsforslag: Separasjon av variable $u = XT$ gir at

$$\frac{T''}{T} - \alpha = \frac{X''}{X} = -\lambda.$$

Pga. randverdiene blir $X = \sin(k\pi x)$ og $\lambda = (k\pi)^2$. Sett $\mu^2 = \lambda - \alpha > 0$. Da blir

$$T'' = -\mu^2 T, \text{ som har løsning } T(t) = a\cos(\mu t) + b\sin(\mu t).$$

Vi får løsningene

$$u(x,t) = \Big(a\cos((\sqrt{(k\pi)^2 - \alpha})t) + b\sin(\sqrt{((k\pi)^2 - \alpha})t)\Big)\sin(k\pi x),$$

for $k = 1, 2, 3, \dots$. For $k = 1$ ser vi at hvis $a = 0$ er $u(x,0) = 0$ og dersom

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{(k^2\pi^2 - \alpha)}b_k \sin(k\pi x) \sim 1 \sim \frac{4}{\pi}\sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{1}{2\ell - 1}\sin((2\ell - 1)\pi x)$$

blir $u_t(x,0) = 1$. Så

$$u(x,t) = \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{((2k-1)\pi)^2 - \alpha}}\frac{1}{2k-1}\sin((2k-1)\pi x)\sin(\sqrt{((2k-1)\pi)^2 - \alpha}t)$$

2b

Vis at

$$\frac{d}{dt}\int_0^1 \left((u_t)^2 + (u_x)^2 - \alpha u^2\right)\,dx = 0,$$

(Fortsettes på side 3.)

der u løser (1).

Løsningsforslag: Vi deriverer og får

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\int_0^1 (u_t)^2 + (u_x)^2 - \alpha u^2\,dx &= 2\int_0^1 u_t u_{tt} + u_x u_{tx} - \alpha u u_t\,dx \\ &= 2\int_0^1 u_t u_{tt} - u_{xx} u_t - \alpha u u_t\,dx = 0.\end{aligned}$$

2c

Vis at for $\alpha < \pi^2$ kan (1) ha høyst én deriverbar løsning. (Hint: Bruk at $\int_0^1 (u_x)^2\,dx \geq \pi^2 \int_0^1 u^2\,dx$.)

Løsningsforslag: Poincarés ulikhet sier at $\int_0^1 (u_x)^2\,dx \geq \pi^2 \int_0^1 u^2\,dx$, så vi får at

$$\int_0^1 (u(x,t)_t)^2 + (\pi^2 - \alpha)u(x,t)^2\,dx \leq \int_0^1 g(x)^2 + f'(x)^2 - \alpha f(x)^2\,dx.$$

Hvis $f = g = 0$ så blir $u = 0$ og vi har entydig løsning.

Oppgave 3

Betrakt rand/initialverdiproblemet

$$\begin{cases} u_t - u_{txx} = u_{xx}, & t > 0,\ x \in (0,1), \\ u(0,t) = u(1,t) = 0, & t > 0, \\ u(x,0) = f(x). \end{cases} \tag{2}$$

3a

Bruk separasjon av variable til å finne en formell løsning på (2).

Løsningsforslag: Separasjon av variable gir

$$\frac{T'}{T' + T} = \frac{X''}{X} = -(k\pi)^2, \quad k = 1, 2, 3, \ldots$$

Altså $X = X_k(x) = \sin(k\pi x)$. Videre

$$T'(t) = -\frac{(k\pi)^2}{1 + (k\pi)^2} T =: -\beta_k T.$$

Den formelle løsningen blir

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k e^{-\beta_k t} \sin(k\pi x)$$

der $b_k = 2\int_0^1 f(x)\sin(k\pi x)\,dx$.

(Fortsettes på side 4.)

3b

Vi ser på følgende skjema for å løse (2): La $N > 1$ være et heltall og sett $\Delta x = 1/(N+1)$, og la $\Delta t > 0$. Sett $x_j = j\Delta x$ og $t^m = m\Delta t$. La $\left\{v_j^m\right\}$ tilfredstille

$$\begin{cases} \frac{v_j^{m+1}-v_j^m}{\Delta t} - \frac{1}{\Delta t \Delta x^2}\left(v_{j+1}^{m+1} - 2v_j^{m+1} + v_{j-1}^{m+1} - v_{j+1}^m + 2v_j^m - v_{j-1}^m\right) \\ \qquad\qquad = \frac{1}{\Delta x^2}\left(v_{j+1}^m - 2v_j^m + v_{j-1}^m\right), \quad m \geq 0,\ j = 1, \dots, N, \\ v_0^m = v_{N+1}^m = 0, \quad m \geq 0, \\ v_j^0 = f(x_j). \end{cases} \tag{3}$$

Forklar hvorfor dette er et rimelig skjema for å løse (2) slik at vi "burde" ha $v_j^m \approx u(x_j, t^m)$.

Løsningsforslag: Med notasjonen $u_j^m = u(x_j, t^m)$ har vi at

$$\frac{1}{\Delta x^2}\left(u_{j+1}^{m+1} - 2u_j^{m+1} + u_{j-1}^{m+1}\right) = u_{xx}(x_j, t^m) + \mathcal{O}(\Delta x^2)$$

Vi bruker også at

$$\frac{w(x, t+\Delta t) - w(x,t)}{\Delta t} = w_t(x,t) + \mathcal{O}(\Delta t),$$

dersom w er glatt nok. Bruker vi begge disse likhetene får vi at trunkeringsfeilen blir $\tau = \mathcal{O}(\Delta t) + \mathcal{O}(\Delta x^2)$ hvis løsningen u er glatt nok.

3c

Definer vektoren $\boldsymbol{v}^m = (v_1^m, v_2^m, \dots, v_N^m)^\top$. Finn en $N \times N$ matrise A slik at skjemaet over kan skrives

$$\boldsymbol{v}^{m+1} - \boldsymbol{v}^m + A\left(\boldsymbol{v}^{m+1} - \boldsymbol{v}^m\right) = -\Delta t A \boldsymbol{v}^m.$$

Forklar hvorfor egenverdiene til A er ikke-negative. (Du trenger ikke regne ut egenverdiene.)

Løsningsforslag: Vi ser at A blir den vanlige tilnærmingen til $-\Delta$, altså

$$A = \frac{1}{\Delta x^2}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \ddots & & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & & \ddots & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Egenverdiene til A er

$$\lambda_k = \frac{4}{\Delta x^2}\sin^2\left(\frac{k\pi\Delta x}{2}\right), \quad k = 1, 2, \dots, N.$$

(Fortsettes på side 5.)

3d

For gitt Δx, hva kreves av Δt for at skjemaet (3) skal være von Neumann stabilt?

Løsningsforslag: Fra spørsmål **a**) ser vi at den eksakte vekstfaktoren er 1. Vi setter $v_j^m = \alpha^m e^{ik\pi x_j}$ inn i skjemaet og får

$$(\alpha - 1 + \lambda_k(\alpha - 1))\, v_j^m = -\Delta t \lambda_k v_j^m.$$

Vi får at

$$\alpha = 1 - \frac{\Delta t \lambda_k}{1 + \lambda_k}.$$

Skjemaet er Neumann stabilt hvis $|\alpha| \leq 1$ altså hvis

$$-1 \leq 1 - \frac{\Delta t \lambda_k}{1 + \lambda_k} \leq 1,$$

eller

$$\Delta t \frac{\lambda_k}{1 + \lambda_k} \leq 2.$$

Siden $\lambda_k/(1 + \lambda_k) \leq 1$ er det nok å kreve at $\Delta t \leq 2$.

Oppgave 4

La

$$g(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(kx)}{k^{5/3}}.$$

Vis at $g(x)$ er kontinuerlig.

Løsningsforslag: Fra teorem 9.6 i T&W følger det at en Fourierrekke

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin(kx)$$

konvergerer uniformt mot en kontinuerlig funksjon dersom

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k^2 k^2 < \infty.$$

Vi har $b_k = k^{-5/3}$, som gir $b_k^2 k^2 = k^{-4/3}$, og vi har at

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{4/3}} < \infty.$$

THE END