MAT3440, vår 2024
Obligatorisk oppgave.

Innleveringsfrist. Torsdag 4. april 2024, klokken 14:30, i Canvas (canvas.uio.no).

Merk at man har **ett forsøk** på å få oppgaven godkjent. Dette betyr at det ikke lenger gis andregangsforsøk.

Du velger selv om du skriver besvarelsen for hånd og scanner besvarelsen eller om du skriver løsningen direkte inn på datamaskin (for eksempel ved bruk av LaTeX). Besvarelsen skal leveres som én PDF-fil. Scannede ark må være godt lesbare. Besvarelsen skal inneholde navn, emne og oblignummer.

Det forventes at man har en klar og ryddig besvarelse med tydelige begrunnelser. Husk å inkludere alle relevante plott og figurer. Samarbeid og alle slags hjelpemidler er tillatt, men den innleverte besvarelsen skal være skrevet av deg og reflektere din forståelse av stoffet.

I oppgaver der du blir bedt om å programmere må du legge ved programkoden og levere den sammen med resten av besvarelsen. Det er viktig at programkoden du leverer inneholder et kjøreeksempel, slik at det er lett å se hvilket resultat programmet gir.

Oppgaven vil ikke bli rettet på vanlig måte. Etter at oppgaven er levert i Canvas skal hver student forklare besvarelsen og besvare spørsmål for lærer og gruppelærer (ca. 15 min). Oppgaven blir godkjent dersom studenten gir tilfredstillende svar og begrunnelser. Kravene vil ikke være strengere enn før.

Søknad om utsettelse av innleveringsfrist. Hvis du blir syk eller av andre grunner trenger å søke om utsettelse av innleveringsfristen, må du ta kontakt med studieadministrasjonen ved Matematisk institutt (e-post: studieinfo@math.uio.no) senest samme dag som innleveringsfristen.

For å få adgang til avsluttende eksamen i dette emnet, må man bestå alle obligatoriske oppgaver i ett og samme semester.

For fullstendige retningslinjer for innlevering av obligatoriske oppgaver, se her:
www.uio.no/studier/admin/obligatoriske-aktiviteter/mn-math-oblig.html

LYKKE TIL!

Question 1. Let A be the matrix

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

a) Find e^{tA}.

b) Let $\boldsymbol{f}(t) = (f_1(t), f_2(t))^T$ be a known (continuous) function, and consider the differential equation

$$\boldsymbol{x}'(t) = A\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{f}(t). \tag{1}$$

Find a formula for the flow map for (1), i.e., the map taking $\boldsymbol{x}_0 = \boldsymbol{x}(0)$ to $\boldsymbol{x}(t)$, normally denoted $\varphi_t(\boldsymbol{x}_0)$.

c) Set

$$\boldsymbol{f}(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}.$$

Find the solution $\boldsymbol{x}(t)$ when $\boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{x}_0$. Describe the behavior of $\boldsymbol{x}(t)$ for large positive t. (This is independent of the starting point $\boldsymbol{x}_0$.)

d) Let the sequence $\{\boldsymbol{x}_n\}_{n=0}^{\infty}$ be defined by the (Poincaré) map

$$\boldsymbol{x}_{n+1} = \varphi_{2\pi}(\boldsymbol{x}_n), \quad n \geq 0, \quad \boldsymbol{x}_0 = \begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \end{pmatrix},$$

where φ_t is the flow map and $\alpha \geq 0$. Show that

$$\lim_{n\to\infty} \boldsymbol{x}_n = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Is there a periodic solution to (1) with $\boldsymbol{f}$ as above?

e) Let $r(t)$ and $\theta(t)$ be the polar coordinates of $\boldsymbol{x}(t)$ such that $r = \sqrt{\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{x}}$ and θ such that $\boldsymbol{x} = (r\cos(\theta), r\sin(\theta))^T$. Show that

$$r'(t) + r(t) = \cos(t-\theta),$$

and use this to show that

$$r(t) \leq (r(0)-1)\,e^{-t} + 1,$$

for $t > 0$.

Question 2. In this exercise we consider the differential equation

$$x'' = -ax - bx^3 - dx' + g\cos(\omega t), \tag{2}$$

where a, b, d, g and ω are non-negative constants.

a) Explain how we can write (2) as a system of 2 first order equations;

$$\boldsymbol{x}' = \frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ -ax_1 - bx_1^3 - dx_2 + g\cos(\omega t) \end{pmatrix} = \boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{x}).$$

b) Show that if $d = g = 0$ then $H(\boldsymbol{x}(t)) = H(\boldsymbol{x}(0))$ where H is the function

$$H(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{2}x_2^2 + \frac{1}{2}ax_1^2 + \frac{b}{4}x_1^4,$$

and that if $d > 0$ and $g = 0$ then $H(\boldsymbol{x}(t)) \leq H(\boldsymbol{x}(0))$. Explain why this implies that $\boldsymbol{x}(t)$ is bounded.

c) Implement the improved Euler method and use this to calculate an approximation to the solution for $t \in [0, 200]$ and

$$\boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{0},\ a = 1,\ b = 4.1,\ d = 0.02,\ g = 8,\ \omega = 0.5.$$

Plot the approximate solution in the (x_1, x_2) plane. You must choose a suitably small h yourself.

d) Use the improved Euler method to implement an approximate Poincaré map for this equation. The Poincaré map is the map taking an initial value $\boldsymbol{x}(0)$ to $\boldsymbol{x}(2\pi/\omega)$. We are not able to calculate $\boldsymbol{x}(2\pi/\omega)$ exactly, so we use the improved Euler method instead. We call this approximate Poincaré map $A_h(\boldsymbol{x})$, where h is the step size used in the improved Euler method.

Calculate the sequence $\{\boldsymbol{x}_n\}_{n=0}^{10000}$ defined by

$$\boldsymbol{x}_0 = \boldsymbol{0}, \quad \boldsymbol{x}_{n+1} = A_h(\boldsymbol{x}_n),\ n \geq 0,$$

and plot $\{\boldsymbol{x}_n\}_{n=500}^{10000}$ in the (x_1, x_2) plane. Comment on your plot.