UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i:	MA 232 — Topologi.
Eksamensdag:	Onsdag 5. juni 2000.
Tid for eksamen:	09.00 – 15.00.
Oppgavesettet er på 3 sider.	
Vedlegg:	Ingen.
Tillatte hjelpemidler:	Ingen.

Kontroller at oppgavesettet er komplett
før du begynner å besvare spørsmålene.

Oppgave 1.

La X være et topologisk rom, og anta at enhver åpen overdekning av X inneholder en tellbar overdekning (Lindelöf-egenskapen). Vis at følgende tre betingelser er ekvivalente:

(1) X er kompakt.

(2) Enhver punktfølge i X har et opphopningspunkt.

(3) Enhver nedstigende følge $A_1 \supseteq A_2 \supseteq A_3 \supseteq \cdots$ av ikketomme, lukkete mengder i X har et ikketomt snitt.

Oppgave 2.

En funksjon $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ kalles en Lipschitz-funksjon hvis det eksisterer en konstant C slik at

$$|f(x) - f(y)| \leq C|x - y|$$

for alle $x, y \in [0,1]$. Mengden $L[0,1]$ av Lipschitz-funksjoner er et lineært underrom av $C[0,1]$, vektorrommet av alle kontinuerlige funksjoner på $[0,1]$.

(Fortsettes side 2.)

Vi gir $C[0,1]$ topologien definert av supremumsnormen $|f|_{\sup} = \sup_x |f(x)|$ og $L[0,1]$ underromstopologien. For en Lipschitz-funksjon definerer vi også

$$\|f\| = \sup_x |f(x)| + \sup_{x \neq y} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x-y|} \ .$$

a) Vis at $\| \ \|$ er en norm på $L[0,1]$.

b) Vis at

$$B = \{f \in L[0,1] \colon \|f\| \leq 1\}$$

er en lukket delmengde av $C[0,1]$.

c) La $f_1, f_2, \ldots \in B$ være en følge av funksjoner slik at $\|f_m - f_n\| \to 0$ når $m, n \to \infty$ (en Cauchy-følge med hensyn på normen $\| \ \|$). Vis at (f_n) konvergerer uniformt mot en Lipschitz-funksjon.

Oppgave 3.

La $SO(n)$ være den spesielle ortogonale gruppen med sin vanlige topologi, $n \geq 2$. Vi definerer en ekvivalensrelasjon $\sim$ i $\mathbb{R}^n$ ved at $x \sim y$ hvis det fins en $A \in SO(n)$ slik at $Ax = y$, der Ax står for matrisen A anvendt på søylevektoren x. La $W = \mathbb{R}^n / \sim$ være kvotientrommet definert av $\sim$ og $\pi \colon \mathbb{R}^n \to W$ den kanoniske avbildningen.

a) Bestem ekvivalensklassene i $\mathbb{R}^n$ definert av $\sim$.

b) Definer $f \colon \mathbb{R}^n \to [0, \infty)$ ved $f(x) = |x| = (x_1^2 + \cdots + x_n^2)^{1/2}$. Forklar at vi har en kontinuerlig og bijektiv funksjon $\hat{f} : W \to [0, \infty)$ slik at $f = \hat{f} \circ \pi$.

c) Vis at f er åpen og at $\hat{f}$ er en homeomorfi.

d) Avgjør om f er lukket eller ikke.

Oppgave 4.

a) Bevis følgende påstand: "Hvis $f : X \to Y$ er en identifikasjon slik at Y og hver av undermengdene $f^{-1}\{y\}$ i X er sammenhengende (for $y \in Y$), så er X sammenhengende."

(Fortsettes side 3.)

I $\mathbb{R}^2$ definerer vi mengdene

$$S = \{(1 - e^{-\theta})(\cos\theta, \sin\theta) \colon \theta \geq 0\}$$
$$S_1 = \{(x, y) \colon x^2 + y^2 = 1\}$$
$$T = S \cup S_1 \,.$$

b) Bestem sammenhengskomponentene til underrommet T av $\mathbb{R}^2$.

c) Bestem veikomponentene til T.

d) Gjelder påstanden i punkt a) om vi erstatter "sammenhengende" med "veisammenhengende"? Begrunn svaret.

SLUTT