UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i:	MA 232 — Topologi.
Eksamensdag:	Torsdag 7. juni 2001.
Tid for eksamen:	09.00 – 15.00.
Oppgavesettet er på 3 sider.	
Vedlegg:	Ingen.
Tillatte hjelpemidler:	Ingen.

Kontroller at oppgavesettet er komplett
før du begynner å besvare spørsmålene.

X og Y betegner alltid topologiske rom.

Oppgave 1.

En familie av underrom A_α av X kalles lokalt endelig hvis ethvert punkt i X har en omegn som bare snitter endelig mange A_α. Vis at unionen av en lokalt endelig familie av lukkede mengder er lukket.

Oppgave 2.

La $X_1, X_2, \ldots$ være en tellbar familie metriske rom og la d_i betegne metrikken på X_i. Vi anser det som kjent at $d_i' = \frac{d_i}{1+d_i}$ er en ekvivalent metrikk.

Vis at formelen $d(x,y) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} d_i'(x_i, y_i)$ definerer en metrikk på produktet $X = \prod X_i$, der $x = (x_1, x_2, \ldots)$ og $y = (y_1, y_2, \ldots)$. Vis at topologien definert av denne metrikken er identisk med produkttopologien på $\prod X_i$. (Minner om at en omegnbasis for $x \in \prod_i X_i$ består av mengder $\prod_i U_i$, der U_i tilhører en omegnbasis for x_i og $U_i = X_i$ unntatt for endelig mange i.)

(Fortsettes side 2.)

Oppgave 3.

La X være delmengden av $\mathbb{R}^2$ som er unionen av de lukkede linjesegmentene I_n fra (0,0) til $(1, 1/n)$ for $n = 1, 2, \ldots$. La τ være underromstopologien på X fra den vanlige topologien på $\mathbb{R}^2$ og definer en ny topologi τ' på X ved at en delmengde $U \subset X$ er åpen hvis og bare hvis $U \cap I_n$ er åpen i I_n (med underromstopologien fra τ) for alle n.

a) Vis at τ' er en topologi.

b) Vis at $\tau \subset \tau'$ men $\tau \neq \tau'$, dvs. finn en mengde som er åpen i τ' men ikke i τ.

c) Finn en følge av punkter $x_n \in X$ som konvergerer mot (0,0) i τ men ikke i τ'.

d) Vis at topologien τ' ikke er metriserbar.
(Vink: Anta at topologien τ' kunne defineres ved en metrikk d. Vis at dette er umulig ved å finne en følge av punkter x_n i X slik at avstanden fra x_n til (0,0) i metrikken d går mot 0, men uten at følgen x_n konvergerer mot (0,0) i topologien τ'.)

Oppgave 4.

a) Gitt et produktrom $X \times Y$ der Y er kompakt og gitt et lukket underrom $Z \subset X \times Y$ disjunkt fra $\{x_0\} \times Y$, vis at det fins en omegn U om x_0 i X slik at $U \times Y$ er disjunkt fra Z.

b) Anvend dette til å vise at projeksjonen $p : X \times Y \to X$, $p(x, y) = x$, er lukket hvis Y er kompakt. Gi også et moteksempel med et ikkekompakt rom Y.

Oppgave 5.

a) La τ betegne topologien på X. Anta at A er en sammenhengende delmengde av X og at $\{A_\alpha\}$ er en familie av sammenhengende delmengder av X slik at $A \cap A_\alpha \neq \emptyset$ for alle α. Vis at unionen av A og alle mengdene A_α er sammenhengende.

b) Hvis τ' er en finere topologi på X, dvs. $\tau \subset \tau'$, hva er forholdet mellom sammenhengskomponentene i τ og i τ'? Hva med veikomponentene?

(Fortsettes side 3.)

Oppgave 6.

La R være en åpen ekvivalensrelasjon på X og anta at *grafen til* R, dvs. $\{(x, y); x \sim_R y\}$, er lukket i $X \times X$. Vis at X/R er Hausdorff.

Oppgave 7.

Vi definerer den *kotellbare* topologien τ på $\mathbb{R}$ ved at U er åpen betyr at $\mathbb{R} \setminus U$ er tellbar. (Du skal ikke vise at dette er en topologi.)

a) Vis at $\mathbb{R}$ ikke er kompakt i τ og karakteriser de kompakte mengdene.

b) Vis at $\mathbb{R}$ er sammenhengende i τ og karakteriser de sammenhengende mengdene.

SLUTT