UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i:	MA 245 — Generell topologi.
Eksamensdag:	Torsdag 17. desember 1992.
Tid for eksamen:	09.00 – 15.00.
Oppgavesettet er på 3 sider.	
Vedlegg:	Ingen.
Tillatte hjelpemidler:	Ingen.

Kontroller at oppgavesettet er komplett
før du begynner å besvare spørsmålene.

Oppgave I

La X være et topologisk rom og f en reell funksjon på X. f kalles *nedtil* (respektivt *øvre*) *semikontinuerlig* hvis for hver $x \in X$ og hver $\varepsilon > 0$ finnes en omegn U om x slik at $f(y) > f(x) - \varepsilon$ (respektivt $f(y) - \varepsilon < f(x)$) for alle $y \in U$.

1. Med $f : X \to \mathbb{R}$ som ovenfor vis at f er kontinuerlig hvis og bare hvis f er både nedtil og øvre semikontinuerlig.

2. Hvis $A \subset X$ la $\mathcal{X}_A$ være den karakteristiske funksjonen til A definert ved
$$\mathcal{X}_A(x) = \begin{cases} 0 & x \in A^C \\ 1 & x \in A\,. \end{cases}$$
Vis at A er lukket hvis og bare hvis $\mathcal{X}_A$ er øvre semikontinuerlig.

3. Gi et eksempel på en begrenset øvre semikontinuerlig funksjon $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ med et uendelig antall diskontinuitetspunkter.

4. La $\mathbb{N}$ være de naturlige tall med topologien der de åpne mengdene er $\varnothing, \mathbb{N}, U_n = \{1, \ldots, n\}$, $n \in \mathbb{N}$. Karakteriser de øvre semikontinuerlige reelle funksjonene på $\mathbb{N}$.

(Fortsettes side 2.)

Oppgave II

La X være et topologisk rom.

1. a) Gi definisjonen av hva som menes med at X er et kompakt rom.

   b) Vis det generaliserte Bolzano-Weierstrass teoremet, som sier at i et kompakt rom har hver følge et opphopningspunkt.

2. La X være kompakt og $A_1 \supset A_2 \supset \cdots$ en minskende følge av ikke-tomme lukkede delmengder. Gi to bevis ved å bruke henholdsvis 1a) og 1b) til å vise at $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n \neq \varnothing$.

3. I situasjonen i 2. anta hver A_n sammenhengende. Vis at da er $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n$ sammenhengende. (Vink: Gjør bruk av resultatet i 2. og identiteten $(X - U) \cap A = A - (U \cap A)$.)

Oppgave III

La X være et topologisk rom. Vi sier X er et T_1-*rom* hvis hver punktmengde $\{x\}$, $x \in X$, er lukket. X er *komplett regulær* hvis for hver $x \in X$ og omegn U om x finnes en kontinuerlig funksjon $\mathcal{X} : X \to I = [0,1]$ slik at $\mathcal{X}(x) = 0$, $\mathcal{X}(y) = 1$ for $y \in U^C$.

1. Hadde semesteret vært to uker lengre så hadde du lært at et kompakt Hausdorff rom er komplett regulært. Bruk dette til å vise at hvis X er homeomorf med et underrom av en kube I^F $\left(= \prod\limits_{f \in F} I_f \,, I_f = I \text{ for } f \in F \text{ der } F \text{ er en vilkårlig indeksmengde}\right)$, så er X komplett regulær og T_1.

   Du skal nå vise omvendingen. Beviset er delt i tre deler som følger:

2. a) Vis at hvis X er T_1 og $x, y \in X$, $x \neq y$, så finnes det en åpen delmengde $U \subset X$ slik at $x \in U$, $y \notin U$.

   b) Vis at hvis X er komplett regulær og T_1 så er X Hausdorff.

3. Anta X er komplett regulær og T_1. La F være mengden av alle kontinuerlige funksjoner $\mathcal{X} : X \to I$, og definer

$$\varphi : X \to I^F = \prod_{\mathcal{X} \in F} I_{\mathcal{X}} \,, \qquad I_{\mathcal{X}} = I \,,$$

(Fortsettes side 3.)

ved $pr_{\mathcal{X}}(\varphi(x)) = \mathcal{X}(x)$, der $pr_{\mathcal{X}} : I^F \to I_{\mathcal{X}}$ er projeksjonen på $I_{\mathcal{X}}$.

Vis at φ er kontinuerlig og injektiv.

4. Anta X er komplett regulær og T_1. Vis at φ er en imbedding av X inn i I^F.

SLUTT