UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i:	MA 245 — Generell topologi.
Eksamensdag:	Torsdag 16. desember 1993.
Tid for eksamen:	09.00 – 15.00.
Oppgavesettet er på 3 sider.	
Vedlegg:	Ingen.
Tillatte hjelpemidler:	Ingen.

Kontroller at oppgavesettet er komplett
før du begynner å besvare spørsmålene.

Oppgave 1.

La $C_c(\mathbb{R})$ være vektorrommet av de kontinuerlige funksjoner på $\mathbb{R}$ som er identisk null utenfor et eller annet begrenset intervall.

For $f \in C_c(\mathbb{R})$ definerer vi $|f|_2$ ved $|f|_2 = \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(x)^2 dx \right)^{1/2}$.

a) Vis at $|\ |_2$ er en norm på $C_c(\mathbb{R})$.

(Vink: $|\ |_2$ kan avledes fra et indreprodukt.)

Den tilordnete metrikken skriver vi d_2 ($d_2(f,g) = |f-g|_2$) og den tilordnete topologien τ_2. Ved siden av τ_2 har vi også topologien for uniform konvergens på $C_c(\mathbb{R})$ og topologien for punktvis konvergens, henholdsvis τ_u og τ_p.

b) Fins det en funksjonsfølge som konvergerer mot o (nullfunksjonen) med hensyn på τ_2, men ikke med hensyn på τ_p?

c) Enn én som konvergerer mot o med hensyn på τ_u, men ikke med hensyn på τ_2?

d) Avgjør om τ_2 er sammenliknbar eller ikke med τ_p og τ_u.

(sammenliknbar = finere eller grovere enn).

(Fortsettes side 2.)

Oppgave 2.

La $f : Z \to P$ være en kontinuerlig avbildning mellom topologiske rom. La $K \subseteq Z$ være kompakt. Vis følgende

a) Bildet $f(K) \subseteq P$ er kompakt.

b) Hvis f er reell ($P = \mathbb{R}$), så er f begrenset på K og antar verdien $\sup f(K)$ (og $\inf f(K)$) i minst ett punkt i K.

La X, Y være topologiske rom, Y kompakt. La $f : X \times Y \to \mathbb{R}$ være kontinuerlig. For $a, b \in \mathbb{R}$ definer $U_a \subseteq X$ og $U^b \subseteq X$ ved

$$\begin{aligned} U_a &= \{x \in X : f(x,y) > a \text{ for minst én } y \in Y\} \\ U^b &= \{x \in X : f(x,y) < b \text{ for alle } y \in Y\} \end{aligned}$$

c) Vis at U_a og U^b er åpne mengder i X (muligens tomme) for alle a, b.

For hver $x \in X$ la $m(x)$ være maksimum av f på $\{x\} \times Y$:

$$m(x) = \sup_{y \in Y} f(x,y)\,.$$

d) Vis at funksjonen $m : X \to \mathbb{R}$ er kontinuerlig.

Oppgave 3.

La Q være mengden av alle plan gjennom origo i $\mathbb{R}^3$. Til hver enhetsvektor $a = (a_1, a_2, a_3)$ i $\mathbb{R}^3$ ordner vi planet $q(a)$ gitt ved

$$q(a) = \{y \in \mathbb{R}^3 : a_1y_1 + a_2y_2 + a_3y_3 = 0\}\,.$$

Det gir en surjektiv avbildning $q : S^2 \to Q$. Vi forsyner Q med identifikasjonstopologien.

a) Vis at q er en åpen avbildning.

b) Vis at Q er homeomorf med det projektive planet $\mathbb{P}^2$.

c) La $H \subseteq Q \times \mathbb{R}^3$ være mengden av de par (L, y) der $y \in L$. Vis at H er en lukket mengde i produktrommet $Q \times \mathbb{R}^3$.

d) La $p : H \to Q$ være restriksjonen til H av projeksjonsavbildningen $Q \times \mathbb{R}^3 \to Q$. Avgjør om H er sammenhengende eller ikke.

(Vink: Det kan være enklere å avgjøre problemet først for $H(r) = H \cap \{Q \times D^3(r)\}$, der $D^3(r)$ er mengden av $y \in \mathbb{R}^3$ med $|y| \le r$.)

(Fortsettes side 3.)

Oppgave 4.

La $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ være ettpunktskompaktifikasjonen av den reelle tallinjen $\mathbb{R}$ og la $C(\mathbb{R})$ og $C(\mathbb{R}^*)$ være vektorrommene av kontinuerlige funksjoner på $\mathbb{R}$ og $\mathbb{R}^*$.

a) Forklar at en kontinuerlig funksjon $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ikke kan utvides til en kontinuerlig funksjon $f^* : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ (altså slik at $f^*|\mathbb{R} = f$) medmindre f er begrenset. Vis på den annen side at ikke enhver begrenset, kontinuerlig f kan kontinuerlig utvides. (Gi eksempel.)

La $C_\infty(\mathbb{R})$ være vektorrommet av kontinuerlige reelle funksjoner g på $\mathbb{R}$ med egenskapen: *Til hver* $\varepsilon > 0$ *fins* $N > 0$ *slik at* $|g(x)| < \varepsilon$ *for* $|x| > N$.

b) Vis at alle $g \in C_\infty(\mathbb{R})$ er kontinuerlig utvidbare, og bestem formen på en generell utvidbar funksjon.

Vi forsyner $C_\infty(\mathbb{R})$ med sup-normen $|g|_{\text{sup}} = \sup_{x \in \mathbb{R}} |g(x)|$, slik at $C_\infty(\mathbb{R})$ blir et metrisk rom.

c) Vis at $C_\infty(\mathbb{R})$ er komplett.

SLUTT