UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i:	MA 245 — Generell topologi.
Eksamensdag:	Torsdag 15. desember 1994.
Tid for eksamen:	09.00 – 15.00.
Oppgavesettet er på 3 sider.	
Vedlegg:	Ingen.
Tillatte hjelpemidler:	Ingen.

Kontroller at oppgavesettet er komplett
før du begynner å besvare spørsmålene.

Oppgave 1.

La P^n være det projektive n-rommet av linjer gjennom origo i $\mathbb{R}^{n+1}$. La $p : \mathbb{R}^{n+1} - \{0\} \to P^n$ være identifikasjonen som avbilder en vektor $x \neq 0$ til linjen $p(x) = \{rx \in \mathbb{R}^{n+1} \mid r \in \mathbb{R}\}$ gjennom x og origo i $\mathbb{R}^{n+1}$. Hvis $L \in P^n$ er en slik linje gjennom origo, kaller vi en vektor $x \in \mathbb{R}^{n+1} - \{0\}$ med $p(x) = L$ en *basisvektor* for L.

For hver linje $L \in P^n$, velg en basisvektor $b(L)$ for L. Dette definerer en (ikke nødvendigvis kontinuerlig) funksjon $b : P^n \to \mathbb{R}^{n+1} - \{0\}$ med $p(b(L)) = L$ for alle $L \in P^n$.

La $x \cdot y$ være det Euklidske indreproduktet (prikkproduktet) på $\mathbb{R}^{n+1}$. Definer en funksjon $f : \mathbb{R}^{n+1} - \{0\} \to \mathbb{R}$ ved formelen

$$f(x) = x \cdot b(p(x)).$$

a) Vis at $f(-x) = -f(x)$ og at $f(x) \neq 0$ for alle $x \in \mathbb{R}^{n+1} - \{0\}$. Vis så at bildet $f(\mathbb{R}^{n+1} - \{0\}) \subset \mathbb{R}$ er usammenhengende.

b) Vis at hvis b er valgt som en kontinuerlig funksjon, så er f kontinuerlig.

c) Vis at for $n \geq 1$ er $\mathbb{R}^{n+1} - \{0\}$ et sammenhengende rom.

d) Bevis at for $n \geq 1$ kan ikke b velges som en kontinuerlig funksjon, dvs. at det ikke er mulig å velge en basisvektor for hver linje gjennom origo i $\mathbb{R}^{n+1}$ på en kontinuerlig måte.

(Fortsettes side 2.)

Oppgave 2.

a) La X være et kompakt Hausdorff rom. La $x \in X$, og la $A \subset X$ være en lukket delmengde med $x \notin A$. Vis at det finnes åpne disjunkte delmengder U og V av X slik at $x \in U$ og $A \subseteq V$.

Vi bruker følgende notasjon for adjungsjonsrom.

La X og Y være topologiske rom, $A \subseteq X$ et underrom, og $f : A \to Y$ en kontinuerlig avbildning. Gi den disjunkte unionen $X + Y$ sumtopologien, og la $i : X \to X + Y$ og $j : Y \to X + Y$ være inklusjonsavbildningene. Innfør ekvivalensrelasjonen $\sim$ på $X+Y$ generert av at $i(a) \sim j(f(a))$ for alle $a \in A$, og la kvotientavbildningen $p : X+Y \to (X+Y)/\sim$ sende et element i $X+Y$ til sin ekvivalensklasse. Gi adjungsjonsrommet $X \cup_f Y = (X+Y)/\sim$ identifikasjonstopologien, slik at p er en identifikasjon. La $\bar\imath = p \circ i$, og $\bar\jmath = p \circ j$.

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f"] \arrow[d] & Y \arrow[d, "j"] \arrow[ddr, "\bar\jmath"] & \\
X \arrow[r, "i"] \arrow[drr, "\bar\imath"'] & X + Y \arrow[dr, "p"] & \\
 & & X \cup_f Y
\end{tikzcd}$$

Anta heretter at X og Y er kompakte Hausdorff rom, og at A er en lukket delmengde av X.

b) La $x \in \bar\imath(X - A)$ og $y \in \bar\jmath(Y)$ være to punkter i $X \cup_f Y$. Bruk a) til å vise at det finnes åpne disjunkte delmengder U og V i $X \cup_f Y$ med $x \in U$ og $y \in V$.

c) Vis at adjungsjonsrommet $X \cup_f Y$ er et Hausdorff rom.

d) Vis at adjungsjonsrommet $X \cup_f Y$ er kompakt.

Oppgave 3.

La X og Y være topologiske rom, $\{A_i\}_{i \in J}$ en overdekning av X og $f : X \to Y$ en (ikke nødvendigvis kontinuerlig) funksjon slik at $f|A_i : A_i \to Y$ er kontinuerlig for alle $i \in J$.

Vis at f er kontinuerlig i hvert av de tre tilfellene nedenfor:

(Fortsettes side 3.)

a) $\{A_i\}_{i\in J}$ er en åpen overdekning, dvs. A_i er åpen i X for alle $i \in J$.

b) $\{A_i\}_{i\in J}$ er en endelig lukket overdekning, dvs. J er endelig og A_i er lukket i X for hver $i \in J$.

c) $\{A_i\}_{i\in J}$ er en *lokalt endelig* lukket overdekning, dvs. A_i er lukket i X for alle $i \in J$, og hvert punkt $x \in X$ har en omegn $V \subseteq X$ slik at $A_i \cap V \neq \emptyset$ (A_i møter V) bare for endelig mange $i \in J$.

Oppgave 4.

La X være et kompakt rom, og la $C(X)$ være vektorrommet av kontinuerlige funksjoner $f : X \to \mathbb{R}$. La

$$e : C(X) \times X \to \mathbb{R}$$

være *evaluasjonsavbildningen* gitt ved $e(f,x) = f(x)$ for $f \in C(X)$ og $x \in X$. Anta $X = [0,1] \subset \mathbb{R}$ i punkt a) og b).

a) Finn en funksjonsfølge $(f_n)_n$ i $C(X)$ og en punktfølge $(x_n)_n$ i X slik at $f_n \to f$ *punktvis* i $C(X)$ og $x_n \to x$ i X, men $f_n(x_n)$ konvergerer ikke mot $f(x)$ i $\mathbb{R}$. (Hint: Velg funksjonene f_n slik at $f_n \to 0$ punktvis men ikke uniformt, f.eks. med $|f_n|_{sup} = 1$ for alle n. Finn x_n slik at $f_n(x_n) = 1$ for alle n.)

b) Vis at e ikke er kontinuerlig hvis vi gir $C(X)$ topologien for punktvis konvergens.

La nå X være et vilkårlig kompakt rom. Fra ekstremverdisetningen vet vi at

$$|f|_{sup} = \sup_{x\in X} |f(x)|$$

definerer en norm på $C(X)$, som definerer topologien for uniform konvergens på $C(X)$.

c) Vis at evaluasjonsavbildningen $e : C(X) \times X \to \mathbb{R}$ er kontinuerlig hvis vi gir $C(X)$ topologien for uniform konvergens.

SLUTT