UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i:	MAT 3500/4500 — Topologi.
Eksamensdag:	Tirsdag 14. desember 2004.
Tid for eksamen:	14.30 – 17.30.
Oppgavesettet er på 2 sider.	
Vedlegg:	Ingen.
Tillatte hjelpemidler:	Ingen.

Kontroller at oppgavesettet er komplett
før du begynner å besvare spørsmålene.

Oppgave 1.

La $f : X \to Y$ være en avbildning mellom topologiske rom. Vi definerer en ekvivalensrelasjon i X, der to punkter x_1 og x_2 er ekvivalente hvis $f(x_1) = f(x_2)$. La X/f være det tilsvarende kvotientrommet og $p : X \to X/f$ den kanoniske avbildningen. La $\hat{f} : X/f \to Y$ være avbildningen gitt ved $\hat{f}(p(x)) = f(x)$.

a) Vis at $\hat{f}$ er kontinuerlig hvis f er kontinuerlig.

b) Vis at $\hat{f}$ er en homeomorfi hvis f er en identifikasjon.

Oppgave 2.

La $S^1 \subseteq \mathbb{R}^2$ være enhetssirkelen om origo i $\mathbb{R}^2$, og la $\theta : \mathbb{R} \to S^1$ være avbildningen $\theta(t) = (\cos t, \sin t)$. Da er θ en identifikasjon. (Skal ikke vises.)

a) Bestem inversbildet (fiberen) $\theta^{-1}\{\theta(t)\}$ for vilkårlig $t \in \mathbb{R}$.

b) Vis at θ er en åpen avbildning.

c) Vis at θ er en lokal homeomorfi.

(Fortsettes side 2.)

Oppgave 3.

La F_{-1}, F_0 og F_1 være underrommene av $\mathbb{R}^3$ gitt ved likningen

$$x^2 + y^2 - z^2 = k$$

for $k = -1, 0$ og 1, henholdsvis.

a) Vis at $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ gitt ved

$$f(x, y, z) = \left(x/\sqrt{z^2+1}\,, y/\sqrt{z^2+1}\,, z\right)$$

sender F_1 homeomorft på sylinderen C gitt ved $x^2 + y^2 = 1$.

b) Bestem komponentene til F_{-1}, F_0 og F_1.

c) Avgjør om F_i og F_j er homeomorfe eller ikke for $i \neq j$.

SLUTT