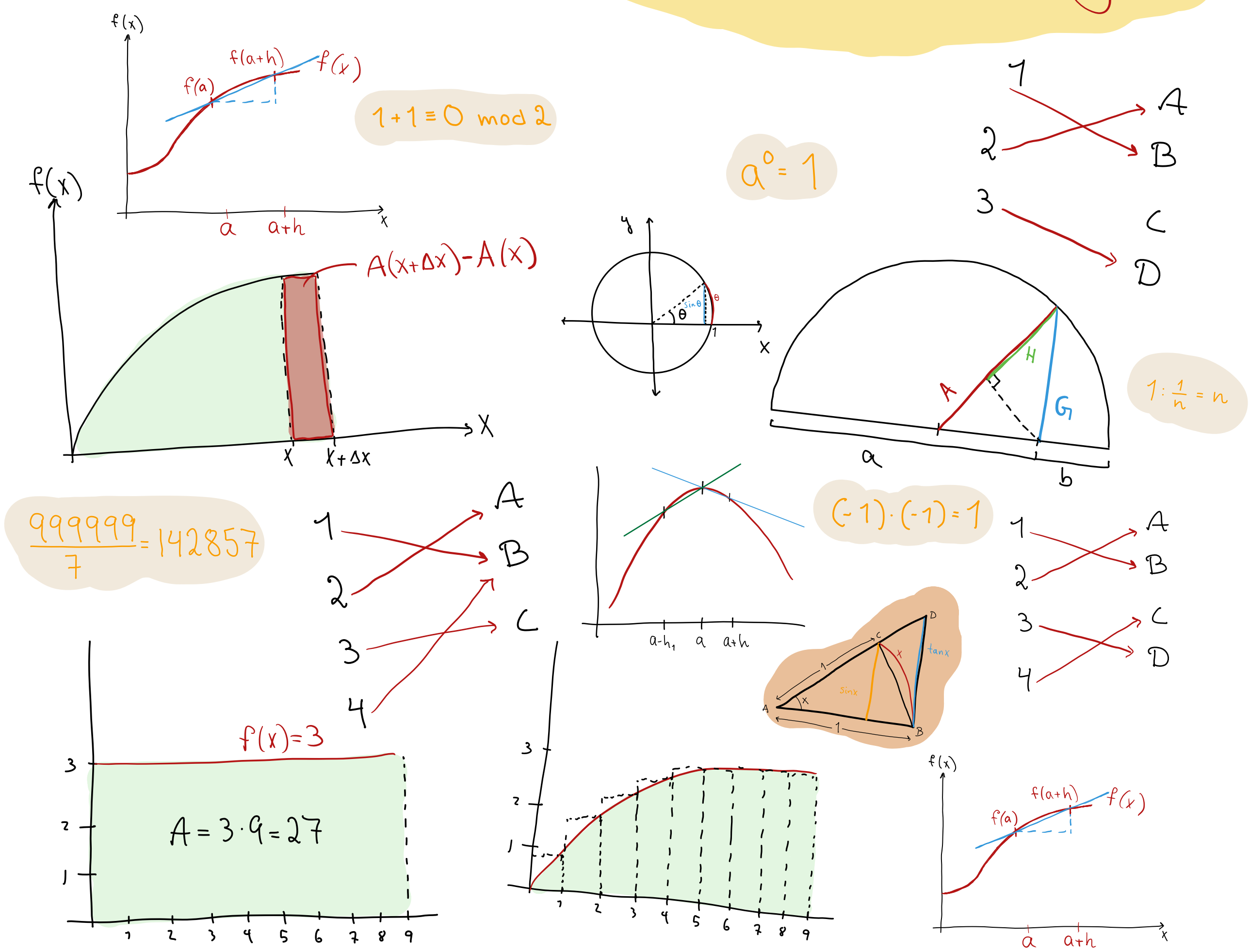
MAT4010

Skolematematikk fra et avansert synspunkt

Anne Bmgård



Innhold

Introduksjon

Kjære, MAT4010-student!

Dette kompendiet er skrevet spesielt for kurset MAT4010 - Skolematematikk fra et avansert synspunkt. Det ligger derfor tett opp til forelesningene og er aller mest nyttig dersom det brukes både før og etter forelesingene. En anbefaling er at du leser gjennom kapittelet eller delkapittelet som skal gjennomgås før forelesning og at du prøver deg på noen av oppgavene. Da vil du få mye mer ut av både forelesningene og kompendiet! Noen av oppgavene er vanskelig å gjøre uten at du har vært på forelesning. Disse er market med symbolet for spar, ♠, nettopp fordi du bør spare oppgaven til etter forelesning. Hvis du allerede har lest gjennom disse oppgavene før forelesning vil du naturligvis være bedre rustet til å løse dem etter forelesning.

1. Oppgavene i kompendiet er plassert i gule bokser. Disse finnes det ikke løsningsforslag til, men bør være mulig å løse ved å bruke kompendiet, internett eller forelesningene.

I margen er det plassert figurer og noe tekst. Den blå teksten er forklaring av matematiske begrep som brukes i teksten. De brune teksten er oftere lengre forklaringer eller fiffige observasjoner.

Den **blå teksten** forklarer et matematisk begrep.

Den **brune teksten** er ofte lengre forklaringer eller fiffige observasjoner.

Kompendiet ble skrevet høst og vår 2021/2022 og er langt fra perfekt. Dersom du skulle ha noen tilbakemeldinger eller finner store eller mindre store feil blir det satt pris på om disse sendes til annebrug@math.uio.no.

Ønsker deg lykke til med faget og med jobben som lærer!

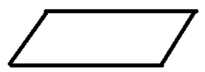
1 | Kul geometri

1.1 Hva handler dette om?

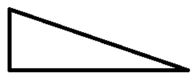
Dette kapittelet handler om hvordan vi definerer og utleder formlene for omkrets, areal, overflateareal og volum. Formlene vi skal se på kjenner du fra videregående, men vi skal se på hvorfor formlene er som de er.

1.2 Geometri i planet

I denne seksjonen skal vi se på geometri i planet. I planet er det omkrets og areal vi konsentrere oss om. Først skal vi se på areal av firkanter og trekanter. Vi tar utgangspunkt i at arealet av et rektangel er $\mathbf{a} \cdot b$, der a og b er sidene i rektangelet.



Figur 1.1: Parallellogram



Figur 1.2: Rettvinklet trekant

Figur 1.3: Vilkårlig trekant

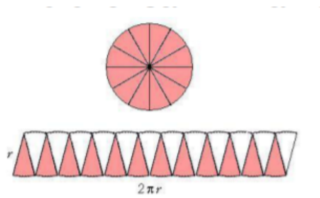
1. Forklar hvordan vi kan finne formelen for arealet av et parallellogram når vi kjenner formelen for arealet av et rektangel. Se figur 1.1.
2. Forklar hvordan vi kan finne formelen for arealet av en rettvinklet trekant når vi kjenner formelen for arealet av et rektangel (her er det minst to muligheter). Se figur 1.2.
3. ♠ Forklar hvordan vi kan finne formelen for arealet av en vilkårlig trekant når vi kjenner formelen for arealet av et parallellogram (altså en trekant som ikke nødvendigvis er rettvinklet). Se figur 1.3.

Nå skal vi prøve å finne arealet av en sirkel. Måten vi skal gjøre det på er å vise at det er en sammenheng mellom arealet og omkretsen til en sirkel. For det første kan vi bruke den såkalte pizzametoden og for det andre kan vi vise at omkretsen er den deriverte av arealet.

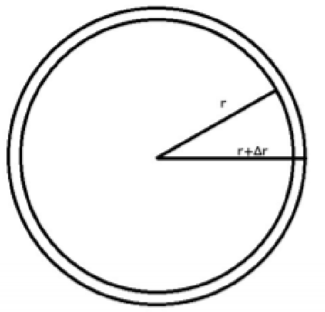
4. ♠ **Pizzametoden** Anta at du vet hva omkretsen, O, og radius, r, til sirkelen er. Forklar hvordan du kan bruke pizzametoden til å finne arealet av sirkelen. Forklar at dette også viser at hvis du i stedet kjenner arealet, A, og radius r, så kan du finne omkretsen. Se figur 1.4.

5. ♠ **Derivasjon** Vis ved å bruke definisjonen av den deriverte at omkretsen til en sirkel er den deriverte av arealet til sirkelen. Se figur 1.5.

6. ♠ Gjelder sammenhengen om at omkretsen er den deriverte av arealet generelt, eller bare for sirkler?



Figur 1.4: Pizzametoden



Figur 1.5: Hvor mye endrer arealet av sirkelen seg når vi utvider radius med Δr?

Vi har nå vist at hvis vi kjenner til enten arealet/omkretsen av en sirkel, kan vi finne den omkretsen/arealet ved å bruke pizzametoden eller derivere/integrere.

1.2.1 Omkretsen til en sirkel

Nå skal vi gjengi et teorem vi har benyttet oss av mange ganger før, men som man kanskje ikke har tenkt over at er noe som må bevises. Teoremet sier at hvis du har en sirkel og måler omkretsen og diameteren og deler diameteren på omkretsen, vil du få det samme tallet som om du hadde gjort det samme med en helt annen sirkel. Forholdet mellom omkrets og diameter er altså det samme for alle sirkler!

Teorem 1.2.1. *For enhver sirkel har vi at* $\frac{O}{d} = k$*, der* O *er omkretsen,* d *er diametereren og* k *er en konstant.*

En **regulær mangekant** er en mangekant der alle sider og alle vinkler er like store.

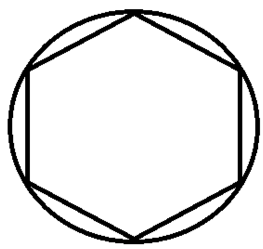
Vi bruker P_n fordi et annet navn på mangekant er polygon.

Tenk gjennom hvorfor dette ikke er et trivielt resultat. Uansett hvilke sirkler vi velger oss, store som små, vil forholdet mellom sirklenes omkrets og diameter være det samme.

For å kunne bevise resultatet trenger vi å finne ut hvordan vi kan måle omkretsen til en sirkel. Siden sirkelen er krum, kan vi ikke måle omkretsen ved å «klippe opp» sirkelen og legge kanten av sirkelen langs en linjal og måle. Vi begynner med enhetssirkelen, S_1. Måten vi måler omkretsen på er ved å skrive inn regulære mangekanter i enhetssirkelen og måle omkretsen til disse, se figur 1.6. Vi lager oss en følge av regulære mangekanter, P_n, der antall sider i mangekantene går mot uendelig. Omkretsen til enhetssirkelen, $O(S_1)$, vil være grensen til følgen av omkretsene til disse regulære mangekantene. Formelt kan vi skrive dette slik:

$$O(S_1) = \lim_{n\to\infty} O(P_n)$$

Vi skal nå bevise teorem 1.2.1 ved å bruke denne måten å finne omkretsen til en sirkel.



Figur 1.6: En regulær femkant innskrevet i en sirkel.

Bevis. Vi bruker metoden over til å finne omkretsen til enhetssirkelen og får dermed at

$$\frac{O(S_1)}{d} = \frac{O(S_1)}{2r} = \frac{O(S_1)}{2} = k.$$

Vi skal vise at for en sirkel med radius r, S_r, er også

$$\frac{O(S_r)}{d} = \frac{O(S_1)}{2} = k. \tag{1.1}$$

For å finne et uttrykk for $O(S_r)$ lager vi en følge av regulære mangekanter innskrevet i sirkelen. For å skrive inn regulære mangekanter i en sirkel med radius r må vi strekke elementene i følgen P_n med en faktor r. Vi kaller disse rP_n.

Er du enig i at hvis du øker hver side i en mangekant med en faktor r, så øker omkretsen til mangekanten med en faktor r? Hvis du ikke er enig, sjekk at det stemmer for et kvadrat, se figur 1.6, og overbevis deg selv om at det stemmer for alle mangekanter.

Vi får altså at $O(rP_n) = rO(P_n)$. Nå kan vi finne $O(S_1)$.

$$O(S_r) = \lim_{n\to\infty} O(rP_n) = \lim_{n\to\infty} rO(P_n) = r \lim_{n\to\infty} O(P_n) = rO(S_1)$$

Dermed blir

$$\frac{O(S_r)}{2r} = \frac{rO(S_1)}{2r} = \frac{O(S_1)}{2} = k, \tag{1.2}$$

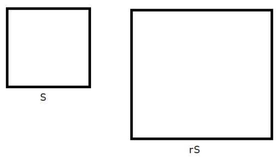
som var det vi skulle vise. ■

Vi har nå vist at forholdet mellom omkrets og diameter til en sirkel er konstant. Denne konstanten er kjent under et annet navn, nemlig π.

Definisjon 1.2.1. $\pi = \frac{O}{d}$, *der O er omkretsen og d er diameteren til en sirkel.*

7. ♠ Skriv ned din egen setning om hva det å være «veldefinert» betyr.
8. ♠ Bevis at π er veldefinert.

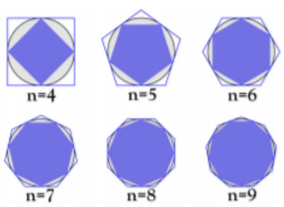
Vi har nå definert π som forholdet mellom omkretsen og diameteren i en sirkel. Vi har imidlertid ikke funnet en verdi for π enda, men det skal vi gjøre nå. Metoden vi skal bruke var det Arkimedes som først benyttet seg av, og går ut på regne ut omkretsen til innskrevne og omskrevne regulære mangekanter til enhetssirkelen. Omkretsene til den omskrevne mangekantene vil alltid være større enn omkretsen til enhetssirkelen og omkretsene til de innskrevne vil alltid være mindre. Videre vet vi fra Likning (1.1) at 2π er omkretsen til enhetssirkelen.



Figur 1.7: Hvor mye øker omkretsen til et kvadrat når sidekantene økes med en faktor r?

Figur 1.8: En video om infinitesimalet (se fram til 11 : 14).

Det tok lang tid før denne konstanten fikk navnet π. At forholdet mellom omkrets og diameter er konstant ble vist allerede rundt 200-tallet (fvt.), men det var først i 1706 at William James først bruke den greske bokstaven π for denne konstanten.



Figur 1.9: Omskrevne og innskrevne mangekanter til enhetssirkelen.

9. Se på figur 1.9 og regn ut et estimat for π ved å regne ut omkretsen til et omskrevet og et innskrevet kvadrat.

10. Finn et enda bedre estimat for π ved å regne ut omkretsen til en innskrevet sekskant.

Nå har vi funnet omkretsen til en sirkel og kan enten integrere eller bruke pizzametoden til å bevise at arealet er πr^2.

1.2.2 Arealet av en sirkel

Vi skal nå se på en annen måte å definere π på. I stedet for å definere π som omkretsen delt på diameter, kan vi definere π ved arealet til en sirkel.

Har det noe å si om vi definerer π ved areal og radius eller omkrets og diameter?

Definisjon 1.2.2. $\pi = \frac{A}{r^2}$ *der A er arealet og r er radius til en sirkel.*

På samme måte som for definisjon 1.2.1, må vi vise at denne definisjonen er veldefinert. Vi må altså vise at det følgende teoremet stemmer.

Teorem 1.2.2. *For enhver sirkel har vi at $\frac{A}{r^2} = k$, der A er arealet, r er radius og k er en konstant.*

Figur 1.10: Bonaventura Cavalieri 1598-1647

Bevis. Vi bruker samme metode i beviset som i beviset for teorem 1.2.1. Vi konstruerer en følge av innskrevne regulære mangekanter der arealet av mangekantene konvergerer mot arealet av enhetssirkelen. Vi får altså at

$$A(S_1) = \lim_{n\to\infty} A(P_n)$$

11. ♠ Forklar at $A(rP_n) = r^2 A(P_n)$, altså at når vi øker sidene i mangekanten med en faktor r øker arealet med en faktor r^2.

12. ♠ Vis at $A(S_r) = r^2 A(S_1)$, altså at arealet av en sirkel med radius r er arealet til enhetssirkelen multiplisert med en faktor r^2.

∎

Figur 1.11: Illustrasjon av Cavalieris prinsipp

1.3 Geometri i rommet

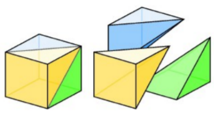
Vi går nå over til å se på overflateareal og volum. Overflateareal og volum er mye mer komplisert enn omkrets og areal, så før vi begynner å finne formlene for volum og overflateareal trenger vi et et prinsipp kalt Cavalieris prinsipp, se figur 1.10. Prinsippet gir en metode for å finne ut når volumet av to figurer er det samme, se figur 1.11

1. Finn ut hva Cavalieris prinsipp sier.

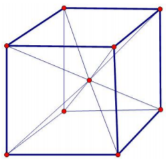
1.3.1 Volum av pyramider

Vi skal bruke Cavalieris prinsipp til å finne volumet av en generell pyramide. Vi begynner med å finne volumet av to typer pyramider og bruker Cavalieris prinsipp til å argumentere for en generell formel. Vi antar at volumet av enhetskuben er 1.

Enhetskuben er en kube med sidekanter lik 1.



Figur 1.12: Tre pyramider i enhetskuben



Figur 1.13: Seks pyramider i enhetskuben

2. Forklar at pyramidene i figur 1.12 har volum $\frac{1}{3}$ (eller $\frac{1}{3}gh$).
3. Forklar at pyramidene i figur 1.13 har volum $\frac{1}{6}$ (eller $\frac{1}{3}gh$).
4. Forklar hvordan du kan generalisere formelen $V = \frac{1}{3}gh$ til alle pyramider uansett form på bunn (inkludert sirkelbunn) og plassering av toppunkt. Hint: bruk Cavalieris prinsipp.

1.3.2 Overflateareal og volum av en kule

Det er en tilsvarende sammenheng mellom overflateareal og volum av en kule som det er mellom omkrets og areal til en sirkel. Vi skal vise at den deriverte av volum er overflateareal. Videre har vi en parallell til pizzametoden, kalt mangometoden. Siden vi har disse sammenhengene mellom volum og overflateareal, kan vi velge om vi vil bevise formelen for overflateareal eller formelen for volum. Den vi ikke beviser, utleder vi fra sammenhengen mellom overflateareal og volum.

Figur 1.14: Mangometoden. Vi deler en kule inn i pyramider. Hva blir summen av volumene til pyramidene?

5. ♠ Forklar hvordan **mangometoden** gir en sammenheng mellom volum og overflateareal av en kule, se figur 1.14
6. ♠ Vis at den **deriverte** av volum er overflateareal.

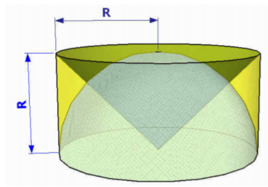
Figur 1.15: Sfære.

Volum av en kule

Har du tenkt på at summen av volumet av en halvkule med radius r og en kjegle med radius og høyde r er likt volumet av en sylinder med radius og høyde r? Se bare her:

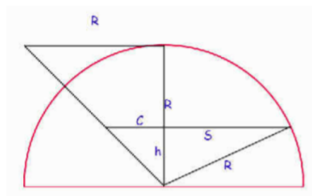
Eksempel 1.3.1.

$$\begin{aligned}
V(\textit{halvkule}) + V(\textit{kjegle}) &= \\
\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{3}\pi r^3 + \frac{1}{3}\pi r^2 \cdot r &= \\
\frac{2}{3}\pi r^3 + \frac{1}{3}\pi r^3 &= \\
\pi r^3 &= \\
\pi r^2 \cdot r &= V(\textit{sylinder})
\end{aligned}$$



Figur 1.16: En kjegle opp ned i en halvkule. Summen av volumene blir volumet til en sylinder

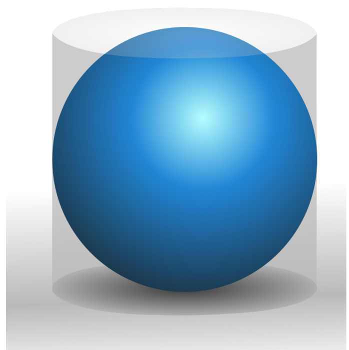
Vi skal bevise at stemmer uten at vi vet hva formelen for volumet av en kule er. Måten vi skal gjøre det på er at vi setter en halvkule på et bord med den flate siden ned. Så setter vi en kjegle opp ned oppi halvkulen, se figur 1.16. Deretter lager vi et horisontalt tverrsnitt gjennom dette. Vi regner deretter ut hva arealet av tverrsnittet er (det bør bli lik arealet av et tverrsnitt gjennom sylinderen, altså πr^2). Vi sier deretter at denne sammenhengen må gjelde i ethvert tverrsnitt og bruker Cavalieris prinsipp til å si at og volumene derfor er like. Se på figur 1.17. Vi skal regne ut arealet i tverrsnittet (som går inn i arket) i høyden h.



Figur 1.17: Tverrsnittet av en kjegle opp ned i en halvkule.

7. Regn ut arealet av tverrsnittet.
   (a) Hva representerer s, h og R?
   (b) Bruk Pytagoras' setning og uttrykk s^2 ved R^2 og h^2.
   (c) Regn ut arealet av kjeglens tverrsnitt.
   (d) Legg sammen de to arealene og vis at summen blir arealet av sylinderen.
   (e) Bruk Cavalieris prinsipp og forklar hvorfor vi nå har bevist at volumet av halvkulen er volumet av sylinderen minus volumet av kjeglen.

Overflateareal av en kule

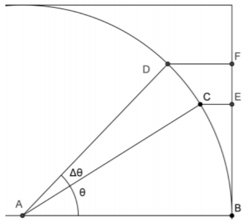


Figur 1.18: Kule med radius r innskrevet i en sylinder med radius r og høyde $2r$.

Siden vi vet at overflatearealet er den deriverte av volumet, kan vi nå finne overflatearealet av en kule ved å derivere $V(r) = \frac{4}{3}\pi r^3$. Det gir $O(r) = V'(r) = 4\pi r^2$. Vi kan også finne overflatearealet uten å kjenne til volumet. Måten vi gjør det på er ved at vi viser at overflatearealet til en kule med radius r faktisk er det samme som overflatearealet til veggen til en sylinder (med radius r og høyde $2r$), se figur 1.18. Den illustrerer den øverste høyre delen av en kule inni en sylinder. Vi setter radius lik 1. Vi skal tenke oss at vi tar tak i overflaten til kjeglen, drar den utover og klistrer den på veggen. For å få enklere regning deler vi opp bevegelsen i to retninger. Først ser vi på bevegelsen horisontalt og deretter vertikalt.

Vi skal finne ut strekningsfaktoren når vi strekker kuleskallet horisontalt. Vi skal finne ut hvor mye lenger AC er enn AB, altså regne ut

$$\frac{AC}{AB} =$$



Figur 1.19: Et tverrsnitt av en kule innskrevet i en sylinder. Vi antar for enkelhetsskyld at $r = 1$.

8. Bruk trigonometri til å uttrykke AB som en funksjon av θ
9. Hva blir forholdet $\frac{AC}{AB}$?

Nå skal vi regne ut hva det tilsvarende forholdet blir når vi strekker kula vertikalt, se figur 1.19. Når vi strekker kula vertikalt vil strekningsfaktoren endres utfra hvor på kuleskallet vi strekker. Vi må derfor finne den momentane strekningsfaktoren. Vi skal finne forholdet

$$\frac{DC}{BA} =$$

10. Forklar hvorfor $BA = \Delta\theta$.
11. Uttrykk DC og DE ved bruk av θ og $\Delta\theta$. Hint: trekk normalen fra B og A på OE.
12. Skriv opp $\frac{DC}{BA}$ ved bruk av relasjonene du fant i oppgavene over.
13. La $\Delta\theta$ gå mot null og finn grensen av $\frac{DC}{BA}$.

Vi har nå funnet ut at når vi strekker kula horisontalt endres overflatearealet med en faktor $\cos\theta$, mens når vi strekker kula vertikalt endres overflatearealet med en faktor $\frac{1}{\cos\theta}$. Til sammen endres dermed overflatearealet med faktoren

$$\cos\theta \cdot \frac{1}{\cos\theta} = 1$$

Dette betyr at når vi strekker ut kuleoverflaten til sylinderveggen, så endres ikke overflatearealet. Overflatearealet av en kule med radius r er altså lik overflatearealet til veggen til en sylinder med radius r og høyde $2r$.

1.3.3 Overflateareal av kulekalott

Til slutt ser vi på overflatearealet til en kulekalott. En kulekalott får du hvis du tar en kule og kutter et tverrsnitt.

11. Vi skal finne arealet av kulekalotten.

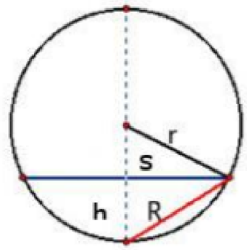
    (a) Bruk det vi fant om sammenhengen mellom overflatearealet av en kule og av sylinderveggen til å forklare at overflatearealet av en kulekalott med høyde h og R er $O = 2\pi rh$.

    (b) Bruk Pytagoras' setning og finn en sammenheng mellom r, h og s.

    (c) Bruk Pytagoras' setning og finn en sammenheng mellom h, s og R.

    (d) Sett sammen det du har funnet over og vis at $2\pi rh = \pi R^2$.

    (e) Hva blir R hvis vi ser på en kule som en kulekalott? Bruk formelen for overflatearealet av en kulekalott og vis at den gir det riktige overflatearealet av en kule når vi ser på en kule som en kulekalott.



Figur 1.20: Vi kutter kula i den blå linja. Delen under den blå linja kalles en kulekalott. S er halvparten av den blå linja, r er radius til kula, h er høyden til kulekalotten. Punktet der r, S og R møtes kalles randen til kulekalotten. Delen av kula som ligger over den blå linja er for så vidt også en kulekalott.

2 | Tallteori

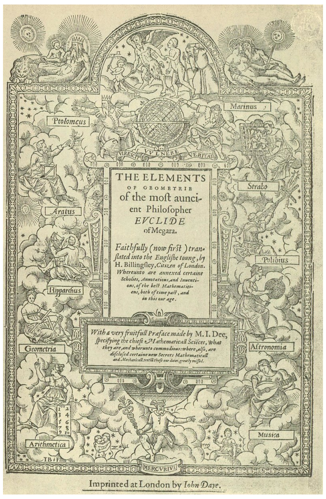
2.1 Hva handler dette om?

Dette kapittelet handler om tall. Vi skal se på hva vi mener to tall sin største felles divisor og hvordan vi kan finnne denne. Videre skal vi bevise at alle naturlige tall kan skrives som et unik produkt av primtall, også kalt aritmetikkens fundamentalteorem. Til slutt ser vi på modulær aritmetikk. Det vil si at vi regner som på klokka. Hvis klokka er 11 så er den om to timer 1. Matematisk kan man skrive dette $11 + 2 = 1 \mod 12$. Vi tenker oss at hver gang vi kommer til 12 så begynner vi på nytt igjen. Vi bruker dette til å vise Eulers teorem som vil være til hjelp i kapittelet om desimalutviklingen til rasjonale tall.

På engelsk heter største felles divisor greatest common divisor, derfor forkortes det **gcd**.

2.2 Største felles divisor

For to heltall kan man snakke om deres største felles divisor, gcd. Den største felles divisor til to heltall er det største heltallet som deler begge tallene. At et tall deler et annet vil si at svaret på delingen er et heltall. For eksempel er $\gcd(4, 8) = 4$ fordi 4 deler både 4 og 8 og ikke noe større hetall deler begge tallene. Legg merke til at 2 også deler både 4 og 8, men siden vi er opptatt av det største tallet er $\gcd(4, 8) = 4$ og ikke 2.



Figur 2.1: Euklids elementer er et matematisk verk bestående av 13 bind der mye av den matematikken vi bruker i dag for første gang ble skrevet ned.

1. Finn den største felles divisor til følgende par:
   (a) 4 og 5
   (b) 3 og 18
   (c) 4 og 14
   (d) 10 og 7
2. Finn ut hva vi kaller vi to tall a og b som har $\gcd(a, b) = 1$.

2.2.1 Euklids algortime

Det blir vanskelig å finne største felles divisor til to tall når tallene blir store. Da må vi faktorisere tallene og det er ikke alltid like lett, særlig hvis faktorene er store primtall. Vi har imidlertid en algoritme, kalt Euklids algoritme, som gir oss en enklere måte å finne gcd til to tall på.

En vanlig feil er å kalle største felles divisor for største felles **multiplum**. Det gir ingen mening. Største felles multiplum til a og b vil være det største tallet som både a og b deler. Det går ikke an å finne det største tallet som oppfyller dette, så det er ikke noe interessant. Det som kan være interessant er å snakke om to talls **minste** felles multiplum, forkortet lcm fra engelsk «least common multiplum». $\operatorname{lcm}(a, b)$ er det minste tallet som både a og b deler. For eksempel er $\operatorname{lcm}(4, 6) = 12$, mens $\gcd(4, 6) = 2$.

Lemma 2.2.1 (Euklids algoritme)**.** *For $k, m, n \in \mathbb{N}$ er $\gcd(m - kn, n) = \gcd(m, n)$.*

Før vi beviser lemmaet skal vi se hvordan vi kan bruke det. Poenget er at hvis vi har to tall og trekker et multiplum av det ene tallet fra det andre har tallene fortsatt samme største felles divisor.

Eksempel 2.2.1.

$$\gcd(64, 28) = \gcd(64 - 2 \cdot 28, 28) = \gcd(8, 28).$$

Vi trekker fra størst mulig multiplum av 28 som er mindre enn 64, nemlig $2 \cdot 28$, slik at vi står igjen med et positivt tall. Merk nå at det fortsatt er litt vanskelig å finne $\gcd(8, 28)$ (det er ikke veldig vanskelig, en rask faktorisering viser at det blir 4, men vi vil at det skal være kjempelett!). Vi fortsetter derfor algoritmen, men trekker nå et multiplum av 8 fra 28.

$$\gcd(8, 28) = \gcd(8, 28 - 3 \cdot 8) = \gcd(8, 4).$$

Nå er det hvert fall lett å se at $\gcd(8, 4) = 4$, men vi fortsetter enda litt til slik at det blir åpenbart.

$$\gcd(8, 4) = \gcd(8 - 2 \cdot 4, 4) = \gcd(0, 4) = 4.$$

Det er kanskje litt rart at vi sier at $\gcd(0, 4) = 4$, men 4 er jo faktisk det største tallet som deler både 4 og 0, fordi $\frac{4}{4} = 1$ og $\frac{0}{4} = 0$.

Figur 2.2: Euklid av Alexandria levde mellom 325 og 265.

3. Finn $\gcd(45, 68)$ ved bruk av Euklids algoritme.
4. Finn $\gcd(27, 105)$ ved bruk av Euklids algoritme.
5. Finn $\gcd(24, 47)$ ved bruk av Euklids algoritme.

Med en **lineærkombinasjon** mener vi her en sum av a og b med koeffisienter i $\mathbb{Z}$. For eksempel er $3a - 2b$ en lineærkombinasjon av a og b.

Vi kan også bruke algoritmen baklengs. Vi vet fra eksempel 2.2.1 at $\gcd(54, 28) = 4$. Nå har vi lyst til å skrive 4 som en lineærkombinasjon av 54 og 28. Vi vil altså finne m og n slik at $4 = 54m + 28n$. Det ser ved første øyekast ikke ut som en enkel oppgave, men hvis vi bruker Euklids algoritme baklengs er det ingen sak!

Eksempel 2.2.2. *Vi skriver først opp Euklids algoritme som i Eksempel 2.2.1.*

$$\begin{aligned}\gcd(64,28) &= \gcd(64-2\cdot 28, 28) = \gcd(8,28) = \gcd(8, 28-3\cdot 8)\\ &= \gcd(8,4) = \gcd(8-2\cdot 4, 4) = \gcd(0,4) = 4.\end{aligned}$$

Vi begynner med 4 *og skriver* 4 *som* $0+4$. *Deretter bytter vi ut* 0 *med* $8-2\cdot 4$.

$$\begin{aligned}4 &= 0+4\\ 4 &= 8-2\cdot 4+4\\ 4 &= 8-1\cdot 4.\end{aligned}$$

I siste linje samlet vi alle firerne våre. Videre bytter vi ut denne fireren med $28-3\cdot 8$ *og bytter deretter ut* 8 *med* $54-2\cdot 28$.

$$\begin{aligned}4 &= 8-1\cdot 4\\ 4 &= 8-1\cdot(28-3\cdot 8)\\ 4 &= 4\cdot 8-1\cdot 28\\ 4 &= 4\cdot(54-2\cdot 28)-1\cdot 28\\ 4 &= 4\cdot 54-7\cdot 28.\end{aligned}$$

Dermed har vi skrevet 4 *som en lineærkombinasjon av* 54 *og* 28.

Det kan hende du lurer på hvorfor vi hadde lyst å skrive 4 som en lineærkombinasjon av 54 og 28. Svaret på det er at vi som oftest ikke lurer på **hvordan** vi kan skrive lineærkombinasjonen, men **om** vi kan skrive 4 som en lineærkombinasjon av 54 og 28. Euklids algoritme viser at hvis $\gcd(54,28)=4$, så vet vi at $4 = 54m + 28n$ for $m,n\in\mathbb{Z}$. Vi skal bruke dette til å bevise lemma 2.4.1

6. Skriv $\gcd(45,68)$ som en lineærkombinasjon av 45 og 68.
7. Skriv $\gcd(27,105)$ som en lineærkombinasjon av 27 og 105.
8. Skriv $\gcd(24,47)$ som en lineærkombinasjon av 24 og 47.

Vi skal nå bevise at Euklids algoritme faktisk stemmer. Det vi skal vise er at hvis $\gcd(m,n)=d$ så er også $\gcd(m-kn,n)=d$.

Bevis. Vi har tallene m og n og antar at vi vet at d er en faktor i både m og n. Det betyr at $m = d\cdot m_1$ og $n = d\cdot n_1$. Vi vet altså ikke hva m_1 og n_1 er, men vi vet at de fins.

9. Skriv $m-kn$ på en annen måte ved å bruke relasjonene over og forklar at d også er en felles faktor til $m-kn$ og n.

Vi har vist at hvis d er en faktor til m og n, er d også en felles faktor til $m-kn$ og n. Nå skal vi bevise andre veien av resultatet: Vi skal anta at d er en felles faktor til $m-kn$ og n og vise at da er også d en felles faktor til m og n. Siden d er en faktor i $m-kn$ kan vi skrive $m-kn=dl$ der vi ikke vet hva l er, men vi vet at den fins.

10. Bruk samme metode som over og vis at d også er en felles faktor til m og n.
11. Forklar at vi nå har bevist lemmaet.

■

2.2.2 Bézouts lemma

Vi har nå sett at hvis $d = \gcd(a, b)$, så kan vi finne m og n slik at $d = am + bn$. Teoremet vi skal gi under gir oss en enda sterkere sammenheng mellom alle heltallsmultipler av $d = \gcd(a, b)$ og alle lineærkombinasjoner av a og b.

Et **heltallsmultippel** av et tall a er et tall som du får ved å multiplisere et heltall z med det tallet. For eksempel er 6 et multippel av 3 fordi $2 \cdot 3 = 6$

Teorem 2.2.2. *For $a, b \in \mathbb{Z}$ har vi at*

$$\{am + bn \mid m, n \in \mathbb{Z}\} = \{z \gcd(a, b) \mid z \in \mathbb{Z}\}$$

Teoremet sier at mengden av alle tall som kan skrives som en lineærkombinasjon av a og b er lik mengden av alle heltallsmultipler av den største felles divisoren til a og b. Det betyr for eksempel at hvis vi vet at vi kan skrive $1 = am + bn$ for $m, n \in \mathbb{Z}$, så vet vi at $\gcd(a, b) = 1$.

Figur 2.3: Étienne Bézout levde mellom 1730 og 1783.

Bevis. Når man skal vise at to mengder er like viser man at hver av mengdene er er en delmengde av den andre. For at det skal gi mening, må mengdene være like. Vi skal altså først vise at $\{am + bn \mid m, n \in \mathbb{Z}\} \subset \{z \gcd(a, b) \mid z \in \mathbb{Z}\}$ og deretter vise at $\{z \gcd(a, b) \mid z \in \mathbb{Z}\} \subset \{am + bn \mid m, n \in \mathbb{Z}\}$.

12. Siden $d = \gcd(a, b)$ er $a = d \cdot a_1$ og $b = d \cdot b_1$ for noen $a_1, b_1 \in \mathbb{Z}$. Bruk dette til at vise at en vilkårlig lineærkombinasjon av a og b vil være et multippel av d. Forklar at vi nå har vist at $\{am + bn \mid m, n \in \mathbb{Z}\} \subset \{z \gcd(a, b) \mid z \in \mathbb{Z}\}$
13. Vi vet at det fins $m, n \in \mathbb{Z}$ slik at $d = am + bn$ når $d = \gcd(a, b)$. Forklar at dette betyr at $\{z \gcd(a, b) \mid z \in \mathbb{Z}\} \subset \{am + bn \mid m, n \in \mathbb{Z}\}$.

■

Ved å bruke teorem 2.2.2 kan vi bevise Bézouts lemma.

Lemma 2.2.3 (Bézouts lemma)**.** *La d være det minste positive heltallet som kan skrives på formen $am + bn$. Da er $d = \gcd(a, b)$.*

14. ♠ Bruk Teorem 2.2.2 til å bevise Bézouts lemma.

2.3 Aritmetikkens fundamentalteorem

Figur 2.4: Hva mener vi med at primtallene er de naturlige tallenes byggesteiner?

Artimetikkens fundamentalteorem høres kanskje stort og flott ut (og det er det også), men det er faktisk et teorem du kjenner til fra før. Teoremet sier at alle naturlige tall kan faktoriseres til primtall og at denne faktoriseringen er unik opp til ombytting av faktorene. At faktoriseringen er unik betyr at det bare er én riktig faktorisering. Hvis du har funnet to forskjellige primtallsfaktoriseringer av et tall er (minst) den ene feil.

Teorem 2.3.1 (Artimetikkens fundamentalteorem)**.** *For $n > 1$ er det en unik faktorisering*

$$n = p_1^{k_1} p_2^{k_2} ... p_r^{k_r}$$

der $p_1 < p_2 < ... < p_r$ er primtall og hver $k_i \geq 1$.

1. Forklar hva p-ene og k-ene representerer.
2. Er 1 et primtall?

Når vi skal bevise dette teoremet må vi først bevise at en slik primtallsfaktorisering eksisterer. Deretter må vi vise at denne faktoriseringen er unik.

3. ♠ Forklar hvordan du kan bevise at primtallsfaktoriseringen eksisterer for et tall $n \in \mathbb{N}$. Det holder at du forklarer hvordan du kan finne en primtallsfaktorisering for et tall.

For å bevise at faktoriseringen er unik trenger vi følgende resultat om primtall.

Lemma 2.3.2. *La p være et primtall og $m, n \in \mathbb{N}$. Hvis p deler mn, så deler p enten m eller n.*

Vi ser på et eksempel før vi beviser lemmaet.

Eksempel 2.3.1. *Hvis $m = 9$, $n = 4$ og $p = 3$ har vi at $\frac{9 \cdot 4}{3} = \frac{36}{3} = 12$. Da må 3 dele enten 4 eller 9. Det stemmer fordi $\frac{9}{3} = 3$. Dette stemmer ikke nødvendigvis hvis det vi deler på ikke er et primtall. For eksempel er $\frac{9 \cdot 4}{6} = 6$, men 6 deler hverken 9 eller 4.*

4. (a) Anta at p er et primtall deler mn og at p ikke deler m. Hva blir $gcd(p, m)$?
   (b) Bruk Lemma 2.2.3 til å forklare hvorfor $am + bp = 1$ for $a, b \in \mathbb{Z}$.
   (c) Bruk likheten over og at p deler mn til å forklare hvorfor p deler n.
   (d) Ved hvilket steg i beviset brukte vi at p er et primtall?

Nå kan vi bevise unikhet av primtallsfaktoriseringen. Vi tenker oss at vi har funnet to ulike primtallsfaktoriseringer av n. Den ene er $n = p_1 p_2 ... p_k$ og den andre er $n = q_1 q_2 ... q_l$. Vi setter disse lik hverandre (det går an fordi begge er jo lik n) og antar at vi har forkortet eventuelt like primtall mot hverandre. Vi får da

$$p_1 p_2 ... p_k = q_1 q_2 ... q_l.$$

Siden vi har denne likheten vet vi at p_1 deler produktet av alle q_i. Av Lemma 2.3.2 vårt får vi da at p_1 enten deler q_1 eller $q_2 ... q_l$ (tenk på q_1 som m og $q_2 ... q_l$ som n). Men $p_1 \neq q_1$, så p_1 deler ikke q_1. Da må p_1 dele $q_2 ... q_l$. Nå setter vi $q_2 = m$ og $q_3 ... q_l = n$ og bruker samme argument. Dette viser til slutt at p_1 ikke deler noen av q_i og vi får dermed en motsigelse. Antakelsen om at vi hadde to ulike primtallsfaktoriseringer var altså feil. De var like hele tiden!

Et eksempel på hvorfor det kan være nyttig å vite at primtallsfaktoriseringen er unik er følgende. Tenk deg at du lager en følge av tall der det første tallet er 2, det neste 4 og forsetter med 2^n. Et spørsmål man kan stille er om noen av tallene i følgen kommer til å slutte på 0. Svaret er at hvis et tall slutter på 0 er det delelig med 10. For at et tall skal være delelig med 10 må det ha faktorene 2 og 5. Men tallene våre er bygget opp av kun 2-ere og vil derfor ikke være delelig med 10.

2.3.1 Uendelig mange primtall

I denne delen skal vi gi et bevis for at det finnes uendelig mange primtall. Måten vi skal bevise det på er ved å konstruere en metode som gir oss et nytt primtall når vi tror vi har listet opp alle primtallene.
Vi antar at det finnes endelig mange primtall og skriver dem opp.

$$p_1, p_2, ..., p_{k-1}, p_k$$

Nå lager vi oss et nytt tall ved å multiplisere sammen alle primtallene og legge til 1. Vi får dermed tallet

$$n = 1 + p_1 \cdot p_2 \cdots p_{k-1} \cdot p_k.$$

Vi skal nå vise at dette tallet n enten er et nytt primtall som vi ikke hadde i listen vår eller et tall som har en primtallsfaktor som vi ikke hadde i listen. Vi har dermed uansett fått et nytt primtall.

5. Anta at n er et primtall. Forklar hvorfor n ikke er noen av primtallene $p_1, p_2, ..., p_{k-1}, p_k$.

6. Anta at n ikke er et primtall. Forklar hvorfor ingen av primtallene $p_1, p_2, ..., p_{k-1}, p_k$ er faktorer i n og at vi derfor at fått nye primtall.

2.4 Modulær aritmetikk

Modulær aritmetikk handler om at vi velger oss et tall n og behandler alle tall som når de deles på n og får samme rest som samme «tall». Vi skriver «tall» fordi det egentlig heter «restklasse». Hvis vi velger oss $n = 3$ vil 4, 7 og 16 være «det samme tallet» eller i samme restklasse. Det er fordi når vi deler tallene på 3 får alle rest 1. Måten vi skriver dette på er følgende:

Eksempel 2.4.1.

$$\begin{aligned} 1 &= 3 \cdot 0 + 1 \\ 4 &= 3 \cdot 1 + 1 \\ 7 &= 3 \cdot 2 + 1 \\ 16 &= 3 \cdot 5 + 1 \end{aligned}$$

Siden alle tallene har samme rest som 1 *sier vi at de er i restklassen til* 1*. Vi skriver restklassen til* 1 *som* $\overline{1}$ *eller* $[1]$.

1. Hvor mange restklasser har vi når $n = 3$?

2. Beskriv hvilke tall som tilhører hvilken restklasse

3. Gjør oppgave 1 og 2 for $n = 4$, $n = 5$ og $n = 6$.

Mengden av restklassene til n kaller vi $\mathbb{Z}_n$. For $n = 3$ får vi at $\mathbb{Z}_3 = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}\}$. Legg merke til at elementene i $\mathbb{Z}_n$ ikke er tall, men restklasser. I hver restklasse er det uendelig mange tall.

4. Skriv opp elementene i $\mathbb{Z}_4$, $\mathbb{Z}_5$ og $\mathbb{Z}_6$.

Vi kan faktisk legge sammen og multiplisere restklasser med hverandre. Vi skal konsentrere oss om multiplisering i dette kapittelet. Multiplisering fungerer som man skulle tro. For $n = 3$ er $\overline{1} \cdot \overline{2} = \overline{1 \cdot 2} = \overline{2}$. Vi må imidertid huske på at vi

$\cdot$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$
$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$
$\overline{1}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$
$\overline{2}$	$\overline{0}$	$\overline{2}$	$\overline{1}$

Figur 2.5: En multiplikasjonstabell for $\mathbb{Z}_3$.

kun har tre elementer i $\mathbb{Z}_3$ og at i $\mathbb{Z}_3$ er $\overline{1} = \overline{4}$. Dermed blir $\overline{2} \cdot \overline{2} = \overline{2 \cdot 2} = \overline{4} = \overline{1}$. En annen måte å skrive dette på er at

$$2 \cdot 2 \equiv 1 \mod 3.$$

Vi leser det «to ganger to er kongruent med én mod tre». Likhetstegnet med tre streker betyr altså «kongruent med». Vi kan lage en tabell over multiplikasjon i $\mathbb{Z}_3$, se figur 2.5.

5. Lag en multiplikasjonstabell for $\mathbb{Z}_4$, $\mathbb{Z}_5$ og $\mathbb{Z}_6$.

2.4.1 Ordenen til et element

Nå skal vi se på noe heter ordenen til et element i $\mathbb{Z}_n$. Ordenen til et element er hvor mange ganger du må multiplisere det med seg selv før du får $\overline{1}$.

6. Finn ordenen til alle elementene i $\mathbb{Z}_3$, $\mathbb{Z}_4$ og $\mathbb{Z}_5$, bortsett fra $\overline{0}$. Er det noen elementer du ikke klarer å finne ordenen til?

7. Hvorfor skulle du ikke finne ordenen til $\overline{0}$?

2.4.2 Enheter

Vi skal nå se på en annen egenskap til elementer i $\mathbb{Z}_n$. Noen av elementene er det som kalles en «enhet». Man skulle kanskje tro at navnet enhet kun var forbeholdt restklassen $\overline{1}$, men det stemmer ikke. En enhet er et element i $\mathbb{Z}_n$ som har en invers. Det betyr at $\overline{a}$ er en enhet dersom det fins en $\overline{b}$ slik at $\overline{a} \cdot \overline{b} = \overline{1}$.

8. Sjekk om alle elementene i $\mathbb{Z}_4$ og $\mathbb{Z}_5$ utenom $\overline{0}$ er enheter.

9. Forklar sammenhengen mellom når et element er en enhet og når det har en orden.

Det er litt slitsomt å sjekke om et element er en enhet når n er stor. Heldigvis har vi et resultat som gir oss en enklere måte å finne ut om et element er en enhet eller ikke.

Lemma 2.4.1. *$\overline{a}$ er en enhet i $\mathbb{Z}_n$ hvis og bare hvis* $\gcd(a, n) = 1$.

Før vi beviser lemmaet skal vi øve oss litt på å bruke det.

10. Bruk Lemma 2.4.1 til å avgjøre om følgende elementer er enheter:
    (a) $\overline{2}$ i $\mathbb{Z}_3$
    (b) $\overline{2}$ i $\mathbb{Z}_4$
    (c) $\overline{6}$ i $\mathbb{Z}_{24}$
    (d) $\overline{7}$ i $\mathbb{Z}_{22}$

Bevis. Siden vi har et «hvis og bare hvis»-lemma må vi bevise begge retninger. Vi begynner med å bevise at hvis $\gcd(a, n) = 1$, så er $\overline{a}$ en enhet i $\mathbb{Z}_n$.

11. Anta $\gcd(a, n) = 1$.
    (a) Forklar hvorfor det fins b og c slik at $ab + cn = 1$.
    (b) Forklar videre at $\overline{a}\overline{b} - \overline{1} = \overline{0}$
    (c) Forklar at vi nå har funnet den inverse til $\overline{a}$ og at $\overline{a}$ dermed er en enhet.
12. Bevis den andre veien ved å gjøre alle stegene over i motsatt rekkefølge.

■

2.4.3 Fermats lille teorem

Figur 2.6: Pierre de Fermat 1601-1665.

Nå har vi funnet en måte å finne ut av om et element er en enhet eller ikke. Det neste vi skal gjøre er å finne en måte å sjekke hvor mange ganger vi må multiplisere enheten med seg selv for å få $\overline{1}$. Nå tenker du kanskje at vi skal finne en måte å finne ut ordenen til et element på, men det er faktisk ikke det vi skal. Ordenen er det minste antall ganger du må multiplisere en enhet med seg selv for å få $\overline{1}$. Den metoden vi skal finne gir oss ikke nødvendigvis det minste antall ganger.

Vi konsentrerer oss først om de tilfellene hvor n er et primtall. Da kaller vi n for p og kaller mengden av restklassene for $\mathbb{Z}_p$.

13. Bruk Lemma 2.4.1 til å forklare at alle restklassene i $\mathbb{Z}_p$ (bortsett fra $\overline{0}$) er enheter.

Dette resultatet viser at alle elementene i $\mathbb{Z}_p$ (bortsett fra $\overline{0}$) kan multipliserers med seg selv et gitt antall ganger og bli $\overline{1}$. Fermats lille teorem sier hvor mange ganger vi må gjøre det før vi er sikre på at vi får $\overline{1}$.

Teorem 2.4.2 (Fermats lille teorem)**.** *La p være et primtall. Hvis* $\gcd(a,p)=1$ *så er* $a^{p-1} \equiv 1 \mod p$.

Merk at $p-1$ ikke nødvendigvis er ordenen til elementet i $\mathbb{Z}_p$. Ordenen til $\overline{1}$ er 1 fordi $\overline{1}^1 = 1$ og ordenen til $\overline{4}$ er 2 fordi $\overline{4}^2 = \overline{16} = \overline{1}$

Hvis du multipliserer $\overline{a}$ (som ikke er $\overline{0}$) med seg selv $p-1$ ganger vil du altså få $\overline{1}$. Vi ser på et eksempel før vi beviser Teorem 2.4.2.

Eksempel 2.4.2. *Vi bruker teoremet på* $\mathbb{Z}_5$*.*

$$\begin{aligned}
\overline{1}^{5-1} &= \overline{1}^4 = \overline{1} \\
\overline{2}^{5-1} &= \overline{2}^4 = \overline{16} = \overline{1} \\
\overline{3}^{5-1} &= \overline{3}^4 = \overline{81} = \overline{1} \\
\overline{4}^{5-1} &= \overline{4}^4 = \overline{256} = \overline{1}
\end{aligned}$$

Bevis. For å bevise Teorem 2.4.2 lager vi oss to mengder av elementer. Det er mengden av alle ikke-null restklasser i $\mathbb{Z}_p$, altså $M = \{\overline{1}, \overline{2}, ..., \overline{p-1}\}$. Den andre mengden er den samme mengden multiplisert med $\overline{a}$, altså $\overline{a}M = \{\overline{a}\overline{1}, \overline{a}\overline{2}, ..., \overline{a}(\overline{p-1})\}$. Vi skal vise at disse to mengdene er like. Måten vi gjør det på er ved å sjekke om alle elementene i $\overline{a}M$ er forskjellige. Vi velger oss to elementer fra $\overline{a}M$ og sjekker om de er like. De to elementene kaller vi $\overline{a}\overline{i}$ og $\overline{a}\overline{j}$

14. Forklar at for at $a \cdot i \equiv a \cdot j \mod p$ må $\overline{i} = \overline{j}$. Dermed er alle elementene i $\overline{a}M$ forskjellige.

15. Forklar hvorfor vi nå vet at mengdene M og $\overline{a}M$ er like.

Siden mengdene M og $\overline{a}M$ er like vil også produktene av elemenetene i hver av mengdene være like, altså er

$$\begin{aligned}
(a \cdot 1) \cdot (a \cdot 2) \cdots (a \cdot (p-1)) &\equiv 1 \cdot 2 \cdots (p-1) \mod p \\
a^{p-1}(p-1)! &\equiv (p-1)! \mod p \\
a^{p-1} &\equiv 1 \mod p,
\end{aligned}$$

siden $(p-1)! \not\equiv 0$. Dermed er Teorem 2.4.2 bevist. ∎

2.4.4 Eulers teorem

Vi skal nå finne en liknende formel for enhetene i $\mathbb{Z}_n$, der n kan være hvilket som helst av de naturlige tallene. For å gjøre det må vi introdusere en ny størrelse. Størrelsen kalles Eulers ϕ-funksjon. $\phi(n)$ er antall positive heltall mindre enn

n som er relativt primiske med n. Husk at hvis a og n er relativt primiske er $\gcd(a, n) = 1$.

Definisjon 2.4.1 (Eulers ϕ-funksjon)**.** *For $n \in \mathbb{N}$ er $\phi(n)$ antall $k \in \mathbb{N}$ der $1 \leq k \leq n$ og $gcd(k, n) = 1$.*

Eksempel 2.4.3.

$$\phi(3) = 2,$$
$$\phi(4) = 2,$$
$$\phi(6) = 2,$$

fordi både 1 *og* 2 *er relativt primiske med* 3*,* 1 *og* 3 *er relativt primiske med* 4*, og* 1 *og* 5 *er relativt primiske med* 6*.*

16. Finn $\phi(7)$.
17. Finn $\phi(8)$.
18. Finn $\phi(9)$.
19. Finn $\phi(p)$ når p er et primtall.

Nå kan vi gi et teorem som sier hvordan vi kan finne ut hvor mange ganger vi kan multiplisere en enhet med seg selv for å få $\overline{1}$. Teoremet heter Eulers teorem og er en generalisering av Fermats lille teorem.

Teorem 2.4.3 (Eulers teorem)**.** *Hvis* $\gcd(a, n) = 1$ *er* $a^{\phi(n)} \equiv 1 \mod n$.

20. Vis at teoremet stemmer for
    (a) $\overline{5}$ i $\mathbb{Z}_6$
    (b) $\overline{4}$ i $\mathbb{Z}_7$
    (c) $\overline{3}$ i $\mathbb{Z}_5$
    (d) Forklar hvorfor Teorem 2.4.3 er en generalisering av Teorem 2.4.2.

Vi skal nå gå litt tilbake til ordenen til en enhet. Vi nevnte at vi ikke kom til å finne en metode som ga oss ordenen, men at vi ville finne et tall som mest sannsynlig var større enn ordenen. Det er imidlertid en sammenheng mellom ordenen til en enhet og det vi fant ut i Eulers teorem. Sammenhengen er at ordenen til en enhet i $\mathbb{Z}_n$ vil dele $\phi(n)$. Hvis vi ser på $\overline{3} \in \mathbb{Z}_8$ vet vi at $\overline{3}^{\phi(8)} = \overline{3}^4 = \overline{1}$. Det kan imidlertid hende at ordenen er mindre enn 4, men da må den dele 4. Vi må sjekke to muligheter: Enten kan ordenen være 1 eller den kan være 2. Ordenen er åpenbart ikke 1 fordi $\overline{3}^1 \neq \overline{1}$, men $\overline{3}^2 = \overline{9} = \overline{1}$. Ordenen til $\overline{3} \in \mathbb{Z}_3$ er altså 2.

21. Finn ordenen til $\overline{5}$ i $\mathbb{Z}_{12}$, vis at deler $\phi(12)$
22. Finn ordenen til $\overline{7}$ i $\mathbb{Z}_{12}$, vis at deler $\phi(12)$
23. Finn ordenen til $\overline{11}$ i $\mathbb{Z}_{12}$, vis at deler $\phi(12)$

3 Desimalutviklingen til rasjonale tall

3.1 Hva handler dette om?

I dette kapittelet skal vi først bevise at alle rasjonale tall har en endelig eller uendelig repeterende desimalutvikling, og at alle tall som har en endelig eller uendelig repeterende desimalutvikling er rasjonale. Deretter skal vi vise hvordan vi kan finne denne desimalutviklingen (uten å bruke kalkulator eller den vanlige divisjonsalgoritmen som vi lærte på barneskolen).

3.2 Et tall er rasjonalt hvis og bare hvis det har en endelig eller uendelig repeterende desimalutvikling

Før vi begynner på beviset skal vi si hva et rasjonalt tall er. Ordet «rasjonalt» kommer fra «rasjon» eller «ratio» som betyr «forhold». Et rasjonalt tall er altså et forholdstall. Det er et forhold mellom to heltall. Vi kaller altså ikke $\frac{\sqrt{2}}{2}$ et rasjonalt tall fordi $\sqrt{2}$ ikke er et heltall. Det første vi beviser er at $0,999... = 1$.

1. Hva betyr det å ha en endelig desimalutvikling?
2. Hva betyr det å ha en uendelig repeterende desimalutvikling?
3. ♠ Forklar på minst fire måter at $0,999... = 1$.
4. Forklar at fordi $0,999... = 1$, så har alle tall med endelig desimalutvikling også en uendelig repeterende desimalutvikling.

Før vi beviser teoremet i tittelen av denne seksjonen skal vi se på noen eksempler.

Eksempel 3.2.1. *Anta at du skal skrive tallet $x = 0,1\overline{23}$ som en brøk. Streken over 23 betyr at disse tallene repeterer. x ser dermed slik ut: $x = 123232323...$ Måten vi gjør skriver $x = 0,1\overline{23}$ som en brøk er som følger:*

$$\begin{aligned}
x &= 0,1\overline{23} \\
10x &= 10 \cdot 0,1\overline{23} \\
10x &= 1,\overline{23} \\
10^2 \cdot 10x &= 123,\overline{23} \\
10^2 \cdot 10x - 10x &= 123,\overline{23} - 10x \\
10x \cdot (10^2 - 1) &= 123,\overline{23} - 1,\overline{23} \\
10x \cdot (10^2 - 1) &= 122 \\
x &= \frac{122}{10 \cdot (10^2 - 1)} \\
x &= \frac{122}{10 \cdot 99} \\
x &= \frac{122}{990}
\end{aligned}$$

5. Skriv følgende tall som brøk:
   (a) $x = 0,4\overline{42}$
   (b) $x = 0,\overline{4}$
   (c) $x = 0,2\overline{013}$
   (d) $x = 0,3\overline{44}$
   (e) $x = 0,34589326973$
6. Ser du et mønster i nevnerne til brøkene du fant?

Vi er nå klare til å bevise det viktige teoremet denne seksjonen handler om.

Teorem 3.2.1. *Et tall er rasjonalt hvis og bare hvis desimalutviklingen er endelig eller uendelig repeterende.*

Bevis. Siden dette er et «hvis og bare hvis»-utsagn må vi bevise at dette stemmer begge veier. Vi viser først at dersom vi har et tall som har endelig eller repeterende desimalutvikling, er det rasjonalt.

7. Vis at et tall med endelig desimalutvikling kan skrives som en brøk. Bruk $x = a_1a_2...a_k$.

8. Vis at et tall mellom 0 og 1 med uendelig repeterende desimalutvikling er rasjonalt. Bruk $x = a\overline{a_1a_2...a_r}$.

9. Forklar hvorfor dette beviset kan utvides til å gjelde tall mindre enn 0 og større enn 1.

Vi skal nå bevise den andre veien i teoremet. Vi skal vise at hvis vi har et rasjonalt tall, har tallet enten endelig eller uendelig repeterende desimalutvikling.

10. Forklar hvorfor en brøk har endelig eller uendelig repeterende desimalutvikling. Hint: Bruk divisjonsalgoritmen. Hvor mange rester i divisjonen er det mulig å få?

■

3.3 Hvordan vi finner desimalutviklingen til en brøk

Vi skal nå konsentere oss om tall mellom 0 og 1. Tenk over hvorfor det holder å bare se på disse tallene.

3.3.1 Endelig desimalutvikling

Som du kanskje har oppdaget, er det enkelt å gjøre om et tall med endelig desimalutvikling til en brøk. Du setter desimalutviklingen som teller og deler på 10 opphøyd i det antallet desimaler du har.

Eksempel 3.3.1.

$$0,1 = \frac{1}{10}$$

$$0,1246 = \frac{1246}{10000}$$

$$0,437 = \frac{437}{1000}$$

$$0, a_1a_2...a_t = \frac{a_1a_2...a_t}{10^t}$$

Denne sammenhengen gjelder også den andre veien. Hvis du har en brøk med en potens av 10 i nevneren, vil desimalutviklingen være endelig. Dette er ikke helt presist. Hvis du har en brøk som kan utvides til å ha en potens av 10 i nevneren, har brøken en endelig desimalutvikling.

Eksempel 3.3.2. *Vi skal skrive $\frac{5}{8}$ som et desimaltall. Vi gjør følgende:*

$$\frac{5}{8} = \frac{5}{2^3} = \frac{5 \cdot 5^3}{2^3 \cdot 5^3} = \frac{5 \cdot 125}{10^3} = \frac{625}{1000} = 0,625$$

1. Skriv følgende brøker som desimaltall ved å bruke metoden i eksempelet over.
   (a) $\frac{3}{25}$
   (b) $\frac{1}{16}$
   (c) $\frac{7}{200}$
2. Skriv en generell framgangsmåte for å finne desimalutviklingen til en brøk der nevneren kan primtallsfaktoriseres til et produkt av bare toere og femmere.

3.3.2 Uendelig repeterende - enkeltperiodisk

Nå skal vi se på brøker der primtallsfaktoriseringen til nevneren ikke har noen toere eller femmere. Vi begynner med å se på tall på formen $x = 0,\overline{a_1 a_2 ... a_r}$. Det viktige er at den repeterende blokken begynner rett etter komma. Det er altså ingen tall før den repeterende blokken begynner. Det er heller ikke vanskelig å skrive et slikt tall som brøk. Du skriver bare tallene i den repeterende blokken i telleren og deler på tallet bestående av r niere.

Eksempel 3.3.3.

$$0,\overline{1} = \frac{1}{9}$$

$$0,\overline{11} = \frac{11}{99}$$

$$0,\overline{01} = \frac{1}{99}$$

$$0,\overline{245} = \frac{245}{999}$$

$$0,\overline{a_1 a_2 ... a_r} = \frac{a_1 a_2 ... a_r}{10^r - 1}$$

Denne sammenhengen har vi også den andre veien: Hvis vi kan skrive brøken slik at den bare har niere i nevneren er desimalutviklingen uendelig repeterende, og den repeterende blokken begynner rett etter komma.

Eksempel 3.3.4.

$$\frac{2}{3} = \frac{2 \cdot 3}{3 \cdot 3} = \frac{6}{9} = 0,\overline{6}$$

$$\frac{4}{11} = \frac{4 \cdot 9}{11 \cdot 9} = \frac{36}{99} = 0,\overline{36}$$

I de to eksemplene over var det ganske lett å utvide nevneren til å bli en nierblokk. Det er imidlertid ikke like åpenbart hvordan man gjør det dersom det for eksempel står 7 eller 13 i nevneren, eller om det i det hele tatt er mulig å utvide 7 eller 13 til en nierblokk. Svaret er at det er mulig! Vi har faktisk allerede vist det i kapittelet om tallteori!

3. Forklar hvorfor Eulers teorem forteller oss både at det er mulig å utvide ethvert tall som er relativt primisk med ti til en nierblokk og hvordan man gjør det. Hint: I teoremet setter du $a = 10$ og n som nevneren i brøken din.

4. Hvilke tall er ikke relativt primiske med 10? Ser du en sammenheng med brøk med endelig desimalutvikling?

Etter å ha gjort oppgavene fant du nok at vi kan utvide en brøk med 7 i nevneren til en nierblokk av lengde $\phi(7) = 6$. Vi vet altså at 7 deler 999999. Vi regner ut dette på kalkulator og får at

$$\frac{999999}{7} = 142857$$

eller at

$$7 \cdot 142857 = 999999.$$

Vi bruker dette til å utvide når vi har en brøk med 7 i nevneren.

Eksempel 3.3.5.

$$\frac{3}{7} = \frac{3 \cdot 142857}{7 \cdot 142857} = \frac{428571}{999999} = 0,\overline{428571}$$

Vi bruker denne metoden også på $\frac{4}{11}$, som vi regnet i ut i eksemplet over.

Eksempel 3.3.6. *Vi finner først at* $\phi(11) = 10$ *og at* $\frac{9999999999}{11} = 909090909$

$$\frac{4}{11} = \frac{4 \cdot 909090909}{11 \cdot 909090909} = \frac{3636363636}{9999999999} = 0,\overline{3636363636} = 0,\overline{36}$$

Vi ser at vi får det samme svaret med denne metoden, men at det var en veldig tungvint måte å gjøre det på! Grunnen til dette er at Eulers teorem sier at 11 deler en nierblokk av lengde $\phi(11)$, men teoremet sier ikke at 11 ikke kan dele en kortere nierblokk. 11 deler faktisk en mye kortere nierblokk, nemlig 99.

5. Forklar hvorfor lengden på den minste nierblokken også deler ordenen til tallet modulo 10.

6. Forklar hvorfor lengden av den repeterende blokken til en brøk med nevner n er en faktor i $\phi(n)$.

7. Skriv tallene som desimaltall:

   (a) $\frac{3}{13}$

   (b) $\frac{7}{41}$

   (c) $\frac{2}{202}$

3.3.3 Uendelig repeterende - forsinket periodisk

Nå skal vi sette de to delene ovenfor sammen og gi en metode for å finne desimalutviklingen til en brøk som har både toere og/eller femmere og minst ett annet primtall som faktorer i nevneren. Metoden går ut på å splitte opp brøken i en sum der det ene leddet kun deles på en tierblokk, mens det andre leddet deles på en nierblokk og kanskje en tierblokk.

Eksempel 3.3.7.

$$\frac{1}{6} = \frac{1}{2 \cdot 3} = \frac{1 \cdot 5 \cdot 3}{(2 \cdot 5) \cdot (3 \cdot 3)} = \frac{15}{10 \cdot 9}.$$

For å kunne spiltte opp brøken i en sum der det første leddet kun har 10 *i nevneren, må vi skrive* 15 *som* $1 \cdot 9 + 6$*. Ser du at vi da vil bli kvitt nieren i nevneren i det ene leddet når vi splitter brøken opp i en sum?*

$$\frac{15}{10 \cdot 9} = \frac{1 \cdot 9 + 6}{10 \cdot 9} = \frac{9}{10 \cdot 9} + \frac{6}{10 \cdot 9} = \frac{1}{10} + \frac{6}{10 \cdot 9}.$$

Det første leddet vet vi at blir $0,1$*, men hva med det andre? Vi vet at* $\frac{6}{9} = 0,\overline{6}$*, men hva skjer når vi også skal dele dette på* 10*? Det som skjer er at den repeterende blokken flyttes ett hakk mot høyre. Altså blir* $\frac{6}{10 \cdot 9} = 0,0\overline{6}$*. Dermed får vi:*

$$\frac{1}{10} + \frac{6}{10 \cdot 9} = 0,1 + 0,0\overline{6} = 0,1\overline{6}.$$

8. Skriv følgende som desimaltall:
   (a) $\frac{4}{14}$
   (b) $\frac{1}{22}$
9. Forklar hvordan du kan finne ut hvor lang den repeterende blokken er og hvor forskjøvet den er bare ved å se på faktoriseringen til nevneren.

4 | Tall og algebra

4.1 Hva handler dette om?

Dette kapittelet handler om at vi skal bygge opp regnereglene vi er kjent med fra før uten at vi vet hva de er. Videre skal vi se på ulike former for uendelighet og bevise at $\sqrt{2}$ ikke er et rasjonalt tall.

4.2 Aritmetikk

Når vi skal bygge opp en teori, må vi begynne et sted. Vi tenker at vi kjenner til de naturlige tallene (altså $\{1, 2, 3..\}$) og vi vet hvordan vi legger dem sammen og multipliserer. Vi skal begynne å introdusere negative tall og lurer på hva det å multiplisere to negative tall bør bety.

4.2.1 Hvorfor er $(-1) \cdot (-1) = 1$?

Før vi forklarer hva det vil si å multiplisere to negative tall skal vi se på hvilke regler vi må forholde oss til. Vi ønsker å følge tre regler. For det første vil vi at multiplikasjonen (og addisjon) skal være **kommutativ**. Det er fancy ord for at «faktorenes orden er likegyldig». Altså vil vi at $a \cdot b = b \cdot a$. For det andre vil vi at multiplikasjon (og addisjon) skal være **assosiativ**. Det betyr at $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$. Det skal altså ikke ha noe å si om du multipliserer a og b først og deretter dette med c eller om du multipliserer b og c først og deretter dette med a. Den tredje regelen vi har lyst å følge er at multiplikasjon skal være **distributiv over addisjon**. Det høres veldig komplisert ut, men det betyr bare at denne vanlige regelen skal holde: $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$. Vi vil altså kunne gange ut paranteser på den måten vi er vant til.

1. Bruk reglene over og at du vet at å multiplisere er det samme som å addere så mange ganger du multipliserer (altså at

   $$a \cdot b = \overbrace{b + b + ... + b}^{a},$$

   til å vise at

   (a) $a(-b) = -ab$. Hint: distributiv lov

   (b) $(-a)b = -ab$. Hint: kommutativ lov

2. Vis at $(-1) \cdot (-1) = 1$ ved å vise at $(-1) \cdot (-1) - 1 = 0$ Bruk reglene over.

4.2.2 Deling

Deling er mye mer komplisert enn addering, subtraksjon og multiplikasjon. Vi skal derfor bruke mest tid på dette. Vi kan forklare deling på to forskjellige måter: delingsivisjon og målingsdivisjon.

3. ♠ Forklar hva vi mener med delingsdivisjon. Hva er begrenseningene til denne forklaringen?

4. ♠ Forklar hva vi mener med målingsdivisjon.

Vi har lært at å dele på null er tull. Nå skal vi se hvorfor dette er en regel. Vi kunne jo, hvis vi ville, ha sagt at å dele på null er gull, men det gjør vi altså ikke. Husk at

$$\frac{a}{b} = c \Longleftrightarrow a = bc$$

5. Bruk relasjonen over til å argumentere for hvorfor $\frac{a}{0}$ bør være udefinert. Argumenter for tilfellene $a = 0$ og $a \neq 0$.

Figur 4.1: Pizza.

Sum og multiplikasjon av brøker

Når man skal forklare summasjon av brøk til elever brukes ofte pizzaer som eksempel. Hvis vi skal legge sammen $\frac{3}{5}$ og $\frac{4}{5}$ kan vi tegne opp to pizzaer hver inndelt i fem og skravere henholdsvis tre og fire deler. Det kan imidlertid oppstå et problem når summasjonen viser at $\frac{3}{5} + \frac{4}{5} = \frac{7}{5}$. Vi får mer enn én pizza. Hvordan skal vi tegne opp denne brøken i form av deler av en pizza? Vi må ha to pizzaer! Det kan derfor argumenteres for at analogien ikke er så god.

6. ♠ Forklar hvorfor det å bruke tallinja til å forklare brøkregning kan være bedre enn å bruke pizzaer.

Heretter bruker vi tallinja til å representere brøker. Skal vi representere $\frac{3}{5}$ deler vi først opp tallinja i $\frac{1}{5}$ store deler. Brøken $\frac{3}{5}$ blir da å bevege seg tre hopp på størrelse $\frac{1}{5}$. Vi skal nå utlede noen regneregler for multiplisering med brøker.

7. ♠ Hva kaller vi en brøk med 1 i telleren?
8. ♠ Forklar hva $k \cdot (\frac{m}{n})$ er ved bruk av tallinja.
9. ♠ Forklar hva $\frac{m}{n} \cdot \frac{1}{l}$ blir.
10. ♠ Forklar hva $\frac{k}{l} \cdot \frac{m}{n}$ blir.

Deling av brøk

Deling av brøk kan være vanskelig å forstå. Særlig regelen om at

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{ad}{bc}$$

kan føles ubegrunnet for mange elever. Du tenker kanskje at vi bare kan skrive stykket som en brudden brøk og multiplisere med $\frac{d}{c}$ oppe og nede og vips så har vi formelen. Det stemmer, men i denne forklaringen ligger også det vanskelige konseptet brudden brøk. Hva skal en brøk delt på en brøk bety? Vi skal derfor introdusere en forklaring som nok er litt mer komplisert, men som kun benytter seg av operasjoner elevene kjenner til fra før.

Vi ser først på hva $1 : \frac{1}{d}$ er.

12. ♠ Hva er $1 : \frac{1}{d}$ og hvordan ville du forklart det til en elev?
13. Hva er $a : \frac{1}{d}$?
14. Hva er $\frac{1}{b}(a : \frac{1}{d})$?
15. Hva er $\frac{1}{b}(a : \frac{1}{d}) : c$?
16. Forklar hvorfor du nettopp har vist at $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{ad}{bc}$.

4.2.3 Potenser

Vi skal nå finne fram til potensreglene vi kjenner fra før. Vi skal definere a^0, a^{-n}, $a^{\frac{m}{n}}$, og diskutere hva 0^0 bør være.

Vi definerer at for $a > 0$ og $n \in \mathbb{N}$ er

$$a^n = \overbrace{a \cdots a}^{n}. \tag{4.1}$$

Hvis vi har $m, n \in \mathbb{N}$ må vi da ha at

$$a^n a^m = \overbrace{a \cdots a}^{n} \cdot \overbrace{a \cdots a}^{m} = \overbrace{a \cdots a}^{n+m} = a^{n+m}. \tag{4.2}$$

og at

$$(a^n)^m = \overbrace{a^n \cdots a^n}^{m} = \overbrace{\overbrace{(a \cdots a)}^{n} \cdots \overbrace{(a \cdots a)}^{n}}^{m} = \overbrace{a \cdots a}^{n \cdot m} = a^{n \cdot m}. \tag{4.3}$$

17. Vis hva a^0 må være hvis Likning (4.2) skal holde.
18. Vis hva a^{-n} må være hvis Likning (4.2) skal holde.
19. Kan du vise hva a^0 og a^{-n} er på enda en måte?
20. Vis hva $a^{1/n}$ må være hvis Likning (4.3) skal holde.
21. Vis hva $a^{m/n}$ må være hvis Likning (4.3) skal holde.

Vi har nå definert potensfunksjonen a^n for $a > 0$. Disse reglene gjelder imidlertid ikke for 0^0.

22. ♠ Forklar hvorfor det er vanskelig å definere 0^0. Hint: se på funksjonen $f(a, x) = a^x$ og la først a gå mot null og deretter x gå mot null.
23. ♠ Gi eksempler på situasjoner der vi likevel definerer 0^0 til å være lik 1.

4.3 $\sqrt{2}$ er irrasjonal

Vi skal nå se litt på rasjonale tall og deretter bevise at $\sqrt{2}$ ikke er et rasjonalt tall. Et tall som ikke er rasjonalt kalles irrasjonalt. For å bevise at $\sqrt{2}$ er et irrasjonalt tall trenger vi et resultat om en sammenheng mellom a og a^2.

Lemma 4.3.1. *En naturlig tall a er et partall hvis og bare hvis a^2 er et partall.*

Siden et tall naturlig tall enten er et partall eller et oddetall innebærer Lemma 4.3.1 også at et tall b er et oddetall hvis og bare hvis b^2 er et oddetall. Vi gir noen eksempler på at dette lemmaet stemmer.

Eksempel 4.3.1.

$$\begin{aligned} a &= 2, & a^2 &= 4 \\ a &= 4, & a^2 &= 16 \\ a &= 6, & a^2 &= 36 \\ \\ b &= 3, & b^2 &= 9 \\ b &= 5, & b^2 &= 25 \end{aligned}$$

Vi skal nå bevise Lemma 4.3.1.

Bevis. Vi beviser først at hvis a er et partall, så er a^2 er partall.

1. Sett $a = 2k$ og vis at a^2 er et partall.

Vi skal nå vise at hvis a^2 er et partall er a et partall. Det er litt vanskelig å vise (det er enklere å kvadrere enn å ta kvadratrot), så vi bruker et triks. Vi beviser i stedet at hvis a er et oddetall, så er a^2 et oddetall.

2. Forklar hvorfor det å vise: a et oddetall $\implies$ a^2 et oddetall, er det samme som å vise at a^2 partall $\implies$ a partall.
3. Bevis at a oddetall $\implies$ a^2 oddetall.

■

Nå kan vi bevise at $\sqrt{2}$ er et irrasjonalt tall.

Teorem 4.3.2. *$\sqrt{2}$ er irrasjonal.*

For å bevise at $\sqrt{2}$ er irrasjonal antar vi at $\sqrt{2}$ er rasjonal og viser at vi da får en motsigelse. Siden vi får en motsigelse var antakelsen vår feil, altså er ikke $\sqrt{2}$ rasjonal, men irrasjonal.

Bevis. Anta at $\sqrt{2}$ er rasjonal, altså at $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$. Vi antar videre at a og b er relativt primiske, de har altså ingen felles faktorer. Videre gjør vi litt regning.

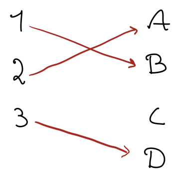
$$\begin{aligned} \sqrt{2} &= \frac{a}{b} \\ 2 &= \frac{a^2}{b^2} \\ 2b^2 &= a^2 \end{aligned}$$

En **injektiv** funksjon sender hvert element i definisjonsmengden til forskjellige elementer i verdimengden, se figur 4.2.

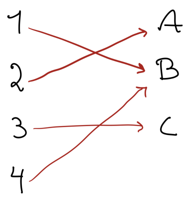
En **surjektiv** funksjon er slik at hvert element i verdimengden blir truffet av et element i definisjonsmengden, se figur 4.3.

4. Forklar at vi nå vet at a er et partall.
5. Sett $a = 2k$ og vis at b også er et partall.
6. Forklar at vi nå har fått en motsigelse.

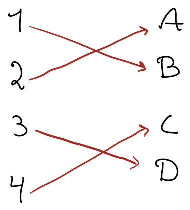
∎



Figur 4.2: En funksjon som er injektiv, men ikke surjektiv.



Figur 4.3: En funksjon som er surjektiv, men ikke injektiv.



Figur 4.4: En funksjon som er både injektiv og surjektiv, altså bijektiv.

4.4 Kardinalitet

Kardinalitet er en måte å sammenlikne størrelsen på to mengder. Et enkelt eksempel er mengder av endelig størrelse. Hvis vi har mengdene $\{1, 2, 3, 4\}$ og $\{2, 4, 6, 8\}$ har de samme kardinalitet, fordi begge har fire elementer. En mer formell måte å vise at to mengder har samme kardinalitet, er å vise at det fins en bijeksjon mellom mengdene. En bijeksjon er en funksjon som er injektiv og surjektiv, se figur 4.4. Vi kan vise at vi har en bijeksjon mellom $\{1, 2, 3, 4\}$ og $\{2, 4, 6, 8\}$ ved å definere funksjonen som er slik at

$$\begin{aligned} f(1) &= 2 \\ f(2) &= 4 \\ f(3) &= 6 \\ f(4) &= 8 \end{aligned}$$

Merk at vi trenger ikke å finne en funksjon som har et funksjonsuttrykk. Det vi trenger er å lage en funksjon der vi hele tiden kan fortelle hva $f(x)$ er og at denne funksjonen er bijektiv. Vi kan enkelt se at hvis to endelig mengder skal ha samme kardinalitet må de ha samme antall elementer.

Det er vanskeligere med mengder av uendelig størrelse. Eksempler på slike mengder er $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, 2\mathbb{Z}, 2\mathbb{Z} + 1$, der de to siste er alle partallene og alle oddetallene. For å angi kardinaliteten til disse mengdene, skal vi sammenlikne dem med de naturlige tallene, $\mathbb{N}$. Vi kaller $\mathbb{N}$ for tellbart uendelig (vi kan jo ikke si hvor mange elementer $\mathbb{N}$ består av) og vi sier at de mengdene som har samme kardinalitet som $\mathbb{N}$ også er tellbart uendelige. Vi summerer opp disse to avsnittene i to definisjoner.

Definisjon 4.4.1. *Vi sier at to mengder har samme* ***kardinalitet*** *dersom det fins en bijeksjon mellom dem.*

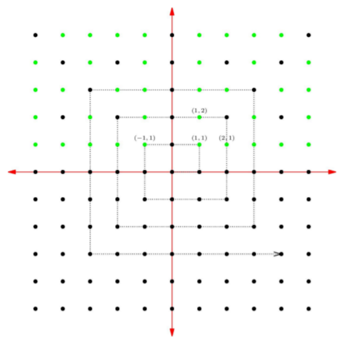
Definisjon 4.4.2. *Vi sier at en mengde er* ***tellbart uendelig*** *dersom den har samme kardinalitet som* $\mathbb{N}$.

Vi skal nå vise om mengdene $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, 2\mathbb{Z}, 2\mathbb{Z}+1$ er tellbart uendelige eller ikke tellbare.

4.4.1 Heltallene er tellbare

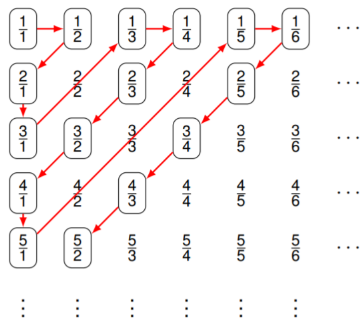
For å vise at heltallene, $\mathbb{Z}$, er tellbare må vi lage en bijektiv funksjon fra $\mathbb{N}$ til $\mathbb{Z}$. Vi skal lage en funksjon som tar verdier i $\mathbb{N}$ og gir verdier i $\mathbb{Z}$, altså $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$. At funksjonen skal være bijektiv betyr for det første at for $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ skal $f(n_1) \neq f(n_2)$. To ulike tall fra $\mathbb{N}$ skal altså gi forskjellige tall i $\mathbb{Z}$. Videre skal det for alle $z \in \mathbb{Z}$ finnes en $n \in \mathbb{N}$ slik at $f(n) = z$. Dette betyr at funksjonen vår skal gi alle tallene i $\mathbb{Z}$. Nå tenker du kanskje at det er vanskelig, for det er vel flere tall i $\mathbb{Z}$ enn i $\mathbb{N}$, så hvordan kan vi lage en funksjon som er injektiv og treffer hele $\mathbb{Z}$? Men dette er nettopp poenget. Vi skal vise at det fins en slik bijeksjon og dermed konkludere med at det er like mange tall i $\mathbb{Z}$ som i $\mathbb{N}$. Funksjonen vår er som følger:

$f(1)$	$f(2)$	$f(3)$	$f(4)$	$f(5)$	$f(6)$	$f(7)$	$f(8)$	...
0	1	-1	2	-2	3	-3	4	...



Figur 4.5: Illustrasjon til bevis at $\mathbb{Q}$ er tellbar.

1. Forklar hvorfor funksjonen over er bijektiv.
2. Bevis at $2\mathbb{Z}$ og $2\mathbb{Z}+1$ er tellbart uendelige.



Figur 4.6: Illustrasjon til bevis at $\mathbb{Q}$ er tellbar.

4.4.2 De rasjonale tallene er tellbare

3. Vis ved å bruke figur 4.5 og figur 4.6 at de rasjonale tallene er tellbare.

4.4.3 De reelle tallene er ikke tellbare

4. ♠ Forklar Cantors diagonalbevis for at de reelle tallene ikke er tellbare.
5. Er de irrasjonale tallene tellbare?
6. Er de komplekse tallene tellbare?

Figur 4.7: Video om ulike typer tellbarhet.

4.5 Forskjellige typer gjennomsnitt

I denne seksjonen skal vi se på tre typer gjennomsnitt. Det første kalles aritmetisk gjennomsnitt og er det gjennomsnittet de fleste nok tenker på. Det andre kalles geometrisk gjennomsnitt og det tredje kalles harmonisk gjennomsitt.

4.5.1 Aritmetisk gjennomsnitt

Hvis vi har to tall a og b, beskriver det aritmetisk gjennomsnittet det tallet som ligger midt mellom a og b på tallinja. Vi finner det ved å summere a og b og dele denne summen på to.

Definisjon 4.5.1. *Gitt tallene a og b så er det aritmetiske gjennomsnittet*

$$\frac{a+b}{2}.$$

Et annet matematisk objekt som bruker navnet aritmetisk er aritmetisk rekke. Vi skal nå se på hvorfor denne typen rekke kalles aritmetisk. Hvis vi har tre etterfølgende tall i en aritmetisk rekke, kan disse skrives generelt som a_{i-1}, a_i og a_{i+1}.

En **aritmetisk rekke** er en rekke på formen $a_{i+1} = a_i + d$ der d er en konstant. Et eksempel er rekken $1+3+5+7+9+\ldots$ der $d = 2$

1. Forklar at $a_{i-1} = a_i - d$ og $a_{i+1} = a_i + d$.
2. Regn ut det aritmetiske gjennomsnittet av a_{i-1} og a_{i+1} og forklar hvorfor rekken kalles aritmetisk.

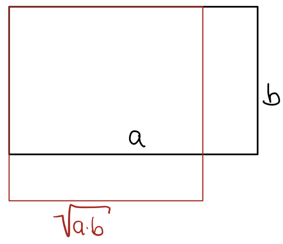
4.5.2 Geometrisk gjennomsnitt

Det geometriske gjennomsnittet av to tall a og b er kvadratroten av produktet mellom dem. Vi skriver opp en definisjon.

Definisjon 4.5.2. *Gitt tallene a og b så er det geometriske gjennomsnittet*

$$\sqrt{a \cdot b}.$$

Grunnen til at denne måten å regne ut gjennomsnittet på kalles geometrisk er at gjennomsnittet har en geometrisk tolkning, se figur 4.8. Tenk deg at du har et rektangel med sidelengder a og b, arealet av dette rektangelet er $a \cdot b$. Hva må sidelengden være dersom du ønsker et kvadrat med det samme arelet som rektangelset. Svaret er naturligvis $\sqrt{a \cdot b}$, det geometriske gjennomsnittet til a og b.



Figur 4.8: Illustrasjon av geometrisk gjennomsnitt.

På samme måte som for det aritmetiske gjennomsnittet skal vi se på geometrisk rekke.

En **geometrisk rekke** er en rekke på formen $a_{i+1} = a_i \cdot k$ der k er en konstant. Et eksempel er rekken $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + ...$ der $k = \frac{1}{2}$.

3. Vis at det geometriske gjennomsnittet av a_{i-1} og a_{i+1} blir a_i.
4. Når er det geometriske gjennomsnittet av to tall lik det aritmetiske gjennomsnittet av de samme tallene?

Hvis vi skriver det geometriske gjennomsnittet som $(\mathbf{ab})^{\frac{1}{2}}$ er det enklere å sammenlikne med det aritmetiske gjennomsnittet $\frac{\mathbf{ab}}{\mathbf{2}}$. Vi kan se på det aritmetiske gjennomsnittet som gjennomsnittet under addisjon og det geometriske gjennomsnittet som gjennomsnittet under multiplikasjon.

4.5.3 Harmonisk gjennomsnitt

Den siste typen gjennomsnitt vi skal se på er harmonisk gjennomsnitt.

Navnet kommer fra begrepet «harmoni» fra musikkteorien. Hvis du trykker ned en vilkårlig tangent på et piano vil ikke bare tonen som tilhører tangenten klinge, men også tonens overtoner. Hvis vi ser på bølgelengdene til tonen og overtonene vil forholdene mellom disse danne en harmonisk følge. La for eksempel tonen ha frekvens 110 Hz. Da vil overtonene har frekvenser 220 Hz, 330 Hz og 440 Hz. Hvis vi setter bølgelengden til tonen som 1, vil bølgelengdene til den første overtonen fra halvparten så stor, den neste én tredjedel osv. Vi får ta en harmonisk følge: 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$.

Definisjon 4.5.3. *Gitt tallene a og b så er det harmoniske gjennomsnittet*

$$\frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}$$

Vi skal se på et eksempel der man bruker harmonisk gjennomsnitt.

Eksempel 4.5.1. *Du kjører til jobben i rushtiden og klarer derfor bare å holde en gjennomsnittlig fart på 30 km/t. På vei hjem fra jobben holder du imidlertid en gjennomsnittlig fart på 60 km/t. Hva er gjennomsnittlig fart på hele turen?*

Det er fort gjort å tenke seg at vi kan bruke det aritmetiske gjennomsnittet slik at vi får en gjennomsnittsfart på $\frac{30+60}{2} = 45$ km/t. Regner vi ut farten ved å bruke sammenhengen mellom strekning, fart og tid får vi et annet (og riktig) svar.

Vi bruker at $v = \frac{s}{t}$ og regner ut tiden vi bruker til, t_1, og fra, t_2, jobb.

$$t_1 = \frac{s}{30}$$
$$t_2 = \frac{s}{60}.$$

Vi regner deretter ut farten vi brukte på hele strekningen.

$$
\begin{aligned}
v &= \frac{2s}{t_1 + t_2} \\
v &= \frac{2s}{\frac{s}{30} + \frac{s}{60}} \\
v &= \frac{2}{\frac{1}{30} + \frac{1}{60}} \\
v &= \frac{2 \cdot 60}{1 + 2} \\
v &= 40
\end{aligned}
$$

Vi ser at vi har regnet ut det harmoniske gjennomsnittet av 30 *og* 60*.*

5. Vis at i den harmoniske rekken er det harmoniske gjennomsnittet av a_{i-1} og a_{i+1} lik a_i. Den harmoniske rekken er $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots$
6. ♠ Bevis at den harmoniske rekken divergerer. Hint: skriv opp de første leddene i rekken og bytt ut noen av leddene slik at du får en rekke du kan ta summen av.

4.5.4 AGH-ulikheten

I denne seksjonen skal vi bevise at for to ulike tall a og b er det aritmetiske gjennomsnittet større enn det geometriske som igjen er større enn det harmoniske. Denne relasjonen kalles AGH-ulikheten. Vi skal bruke figur 4.9 til å bevise ulikheten.

Teorem 4.5.1. *For to ulike tall a og b er*

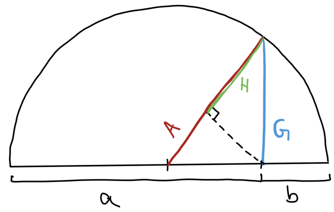
$$A(a,b) > G(a,b) > H(a,b),$$

der $A(a.b)$ er det aritmetiske, $G(a,b)$ det geometrisek og $H(a,b)$ det harmoniske gjennomsnittet.

Bevis. Se på figur 4.9. Det er klart at $A > G > H$. Vi skal vise at $A = A(a,b)$, $G = G(a,b)$ og $H = H(a,b)$ slik at vi har bevist teoremet.

7. Forklar at $A = A(a, b)$
8. Bruk Pytagoras' setning på trekanten som har høyde G og vis at $G = G(a, b)$. Trekanten har hypotenus lik $A = \frac{a+b}{2}$ og den andre kateten lik $a - A = a - \frac{a+b}{2}$.
9. Forklar ved å bruke figur 4.9 at $\frac{A}{G} = \frac{G}{H}$ og bruk dette til å vise at $H = H(a, b)$.

■



Figur 4.9: Illustrasjon til bevis av AGH-ulikheten.

4.6 Røtter av n-tegradspolynomer med heltallskoeffisienter

I denne seksjonen skal vi se på hvordan vi kan finne ut noe om hva røttene til et n-tegradspolynom må være basert på koeffisientene i polynomet. Vi forutsetter at alle koeffisientene er heltall.

Røttene til et polynom er det samme som løsningene til likningen man får ved å sette polynomet lik null.

4.6.1 Tilfellet for andregradslikninger

En generell andregradslikning er på formen

$$ax^2 + bx + c = 0.$$

Vi vet at dersom x_1 og x_2 er løsningene til likningen har vi at

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2).$$

Regner vi ut høyresiden får vi at

$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c &= a(x - x_1)(x - x_2) \\ &= a(x^2 - xx_1 - xx_2 + x_1x_2 \\ &= ax^2 - a(x_1 + x_2)x + ax_1x_2. \end{aligned}$$

Setter vi $a = 1$ får vi at $b = -(x_1 + x_2)$ og $c = x_1x_2$. Dette kan vi bruke til å finne løsningene til en andregradslikning.

Eksempel 4.6.1. *Vi skal prøve å finne løsningene til*

$$x^2 - 12x + 35 = 0$$

uten å bruke abc-formelen. Vi begynner med at $c = 35 = x_1x_2$ *og får alternativene* $x_1 = 5$ *og* $x_2 = 7$ *eller* $x_1 = -5$ *og* $x_2 = -7$*. Siden løsningene også skal oppfylle* $b = -12 = -(x_1 + x_2)$ *er det de positive løsningene som er riktige. Altså er* $x_1 = 5$ *og* $x_2 = 7$*.*

Vi tar med et eksempel der det vi finner ut er at likningen ikke har noen heltallsløsninger.

Eksempel 4.6.2. *Vi skal prøve å finne løsningene til*

$$x^2 + x + 6 = 0.$$

De eneste heltallene som oppfyller $c = 6 = x_1x_2$ *er* $x_1 = \pm 1$ *og* $x_2 = \pm 6$ *eller* $x_1 = \pm 2$ *og* $x_2 = \pm 3$*, men ingen av disse parene oppfyller* $b = 1 = -(x_1 + x_2)$*. Derfor har ikke likningen noen heltallsløsninger.*

10. Finn løsningene på likningene ved å bruke metoden over
    (a) $x^2 + 10x + 21 = 0$
    (b) $x^2 + 6x + 9 = 0$
    (c) $x^2 - 30x + 49 = 0$
    (d) Hva kan du si om produktet av løsningene til en tredjegradslikning?

4.6.2 Tilfellet for n-tegradspolynomer

Vi skal nå se på hva vi kan finne ut om røttene til et generell n-tegradslikning. Vi bruker samme metode som for andregradslikningen for å finne ut at $a_0 = a_n x_0 x_1 \cdots x_n$. Vi har også liknende sammenhenger for de andre koeffisientene a_j, men vi skriver ikke opp disse her.

En **generell n-tegradslikning** er på formen $a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1x + a_0 = 0$, der $a_n \neq 0$.

Vi skal nå anta at vi har en rasjonal rot i polynomet vårt, kall denne roten $\frac{r}{s}$ og la brøken være faktorisert så mye som mulig, r og s er altså relativt primiske. Vi skriver ut det vi da vet.

$$a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1x + a_0 = 0 \tag{4.4}$$
$$a_n(\frac{r}{s})^n + a_{n-1}(\frac{r}{s})^{n-1} + ... + a_1\frac{r}{s} + a_0 = 0 \tag{4.5}$$
$$a_n\frac{r^n}{s^n} + a_{n-1}\frac{r^{n-1}}{s^{n-1}} + ... + a_1\frac{r}{s} + a_0 = 0 \qquad | \cdot s^n \tag{4.6}$$
$$a_nr^n + a_{n-1}r^{n-1}s + ... + a_1rs^{n-1} + a_0s^n = 0 \tag{4.7}$$
$$a_nr^n + a_{n-1}r^{n-1}s + ... + a_1rs^{n-1} = -a_0s^n \tag{4.8}$$
$$r(a_nr^{n-1} + a_{n-1}r^{n-2}s + ... + a_1s^{n-1}) = -a_0s^n \tag{4.9}$$

Vi får altså at hvis $\frac{r}{s}$ er en rot i polynomet må r dele $-a_0s^n$. Vi vet imidlertid at r ikke deler s fordi r og s er relativt primiske. Dermed må r dele a_0.

Vi går nå tilbake til Likning (4.7) og i stedet for å trekke fra $a_0 s^n$ på hver side, trekker vi fra $a_n r^n$.

$$
\begin{aligned}
a_n r^n + a_{n-1} r^{n-1} s + ... + a_1 r s^{n-1} + a_0 s^n &= 0 \\
a_{n-1} r^{n-1} s + ... + a_1 r s^{n-1} + a_0 s^n &= -a_n r^n \\
s(a_{n-1} r^{n-1} + ... + a_1 r s^{n-2} + a_0 s^{n-1}) &= -a_n r^n
\end{aligned}
$$

Dermed får vi at hvis $\frac{r}{s}$ skal være en rot må s dele $a_n r^n$. Av samme grunn som over deler ikke s r og dermed må s dele a_n. Vi skriver det vi har funnet ut som et teorem.

Teorem 4.6.1. *Gitt polynomet $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$, $a_j \in \mathbb{Z}$. Hvis polynomet har en rasjonal rot $\frac{r}{s}$, så r deler a_0 og s deler a_n.*

Vi ser på et eksempel.

Eksempel 4.6.3. *Gitt andregradspolynomet $x^2 + bx + c$. Hvis $\frac{r}{s}$ er en rot i polynomet må s dele $a_2 = 1$. Hvis s skal dele 1 må vi ha $s = \pm 1$. Altså må $\frac{r}{s} = \frac{r}{\pm 1} = \pm r$. Vi får altså at hvis andregradspolynomet $x^2 + bx + c$ skal ha en rasjonal rot, må roten være et heltall.*

Vi kan utvide resultatet fra Eksempel 4.6.3 til et n-tegradspolynom.

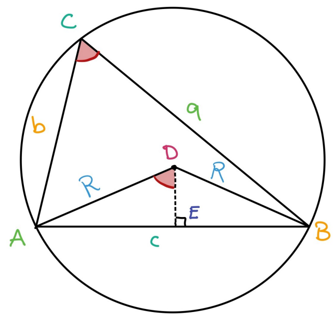
Lemma 4.6.2. *Gitt polynomet $p(x) = x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$, der $a_j \in \mathbb{Z}$. Hvis polynomet har en rasjonal rot er roten et heltall.*

11. Finn ut om x kan være en rot i polynomet $p(x)$ og begrunn svaret.
    (a) $x = \frac{1}{2}$ og $p(x) = x^3 + 6x^2 - 3x + 2$
    (b) $x = 3$ og $p(x) = x^4 + 3x + 9$

5 | Trigonometri

5.1 Hva handler dette om?

I dette kapittelet skal vi først repetere sinussetningen og cosinussetningen. Disse to setningene kan brukes til å bestemme sidene og vinklene i en trekant når vi har fått oppgitt noen av sidene og/eller vinklene til trekanten. Videre skal vi se på hvilken informasjon om sidelengder og vinkelstørrelser vi trenger å ha om en trekant for å kunne bestemme resten av sidene og vinklene.



Figur 5.1: Illustrasjon til bevis av sinussetningen. R er radius i sirkelen. De små bokstavene representerer sider og de store bokstavene representerer vinkler. Vinklene C og D er like store.

5.2 Sinussetningen og cosinussetningen

5.2.1 Sinussetningen

Sinussetningen er et resultat vi kan bruke til å regne ut en ukjent side dersom vi kjenner ett side-/vinkelpar og den motstående vinkelen til den ukjente siden. På samme måte kan vi finne en ukjent vinkel dersom vi kjenner ett side-/vinkelpar og den motstande siden til den ukjente vinkelen. Vi skal nå bevise sinussetningen ved å bevise det som kalles den utvidede sinussetningen. Den er som følger:

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R,$$

se figur 5.1. Vi beviser denne sammenhengen ved å bruke figuren. Vi trenger et resultat om at sentralvinkelen er dobbelt så stor som periferivinkelen.

1. Bruk den rettvinklede trekanten med et toppunkt i sentrum av sirkelen til å vise at $\frac{c}{\sin C} = 2R$, se figur 5.1.
2. Lag en tilsvarende figur slik at du kan vise det tilsvarende for $\sin A$ og $\sin B$.

5.2.2 Cosinussetningen

Cosinussretningen er et resultat som gir en sammenheng mellom de tre sidene i en trekant og hver av vinkelene. Cosinussetningen kan gis på tre uavhengige måter.

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$$

Vi skal nå bevise cosinussetningen.

Bevis. Til beviset trenger vi to versjoner av sinussetningen og vinkelsummen i en trekant.

$$\frac{c}{\sin C} = \frac{b}{\sin B} \tag{5.1}$$
$$\frac{c}{\sin C} = \frac{a}{\sin A} \tag{5.2}$$
$$A + B + C = 180° \tag{5.3}$$

Vi setter $B = 180° - (A + C)$. Da blir

$$\begin{aligned} \sin B &= \sin(180° - (A + C)) \\ &= \sin 180° \cos(A + C) - \sin(A + C)\cos 180° \\ &= \sin(A + C) \end{aligned}$$

Husk at
$\sin u + v = \sin u \cos v + \cos u \sin v$.

Vi bytter ut $\sin B$ med $\sin(A + C)$ i Likning (5.1) og får

$$\frac{c}{\sin C} = \frac{b}{\sin(A + C)}$$
$$\frac{c}{\sin C} = \frac{a}{\sin A}$$

Vi regner ut $\sin(A + C)$ og kryssmultipliserer og får

$$\begin{aligned} c(\sin A\cos C + \cos A\sin C) &= b\sin C \\ c\sin A &= a\sin C \end{aligned}$$

3. Del hver side av hver likning over på $\cos C$.
4. Gjør om likningene slik at du får:

$$\tan C = \frac{c\sin A}{b - c\cos A}$$
$$a^2\tan^2 C = \frac{c^2\tan^2 A}{\cos^2 C}$$

5. Bruk relasjonen $1 + \tan^2 C = \frac{1}{\cos^2 C}$ over slik at du får $c^2\sin^2 A\left(1 + \frac{c^2\sin^2 A}{(b-c\cos A)^2}\right) = a^2\frac{c^2\sin^2 A}{(b-c\cos A)^2}$
6. Forkort $c^2\sin^2 A$ og vis at vi kommer fram til $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$.

■

5.2.3 Bruk av sinussetningen og cosinussetningen

Vi skal nå se på noen egenskaper ved sinussetningen og cosinussetningen. Disse egenskapene vil være nyttige å kjenne til når vi i neste seksjon skal bruke dem til å finne sider og vinkler i en trekant.

6. Forklar hvorfor det å bruke sinussetningen gir deg to svar når du bruker den til å finne en ukjent vinkel. Hint: tenk på enhetssirkelen.
7. Forklar hvordan du kan være sikker på å finne riktig vinkel når du bruker sinussetningen.
8. Forklar hvorfor sinussetningen er enklere å bruke enn cosinussetningene.

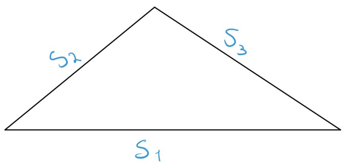
5.3 De fire kongruensteoremene

Vi skal nå se på hvilken informasjon vi trenger om en trekant for å bestemme den. Å bestemme en trekant vil si at vi regner ut de resterende sidene og vinklene i trekanten. Dette kan høres ut som en stor jobb, men det viser seg at det faktisk bare er fire tilfeller vi trenger å studere. Det er altså fire ulike typer informasjon vi kan ha om en trekant for å bestemme den. Hvis vi har en annen type informasjon enn én av disse fire kan vi ikke bestemme resten av vinklene og sidene. Grunnen til at vi ikke kan bestemme resten av vinklene og sidene er ikke at vi ikke har redskapene for å bestemme dem, men at det ikke finnes et entydig svar. Det enkleste eksempelet på informasjon som ikke er én av de fire typene er at vi kjenner til alle vinklene i en trekant. Vi kan ikke bestemme sidene i en trekant hvis vi bare vet vinklene. Overbevis deg selv om at det fins uendelig mange trekanter som har vinklene 30°, 60° og 90°. Vi kaller de fire typene for kongruensteoremer.

To trekanter er **kongruente** dersom de har parvis like lange sider og parvis like store vinkler.

5.3.1 Side-side-side (SSS)

Det første kongruensteoremet sier at hvis man har to trekanter som har parvis like lange sider, er de kongruente. Kongruensteoremet kalles SSS fordi vi kjenner til alle sidene (S står for side).



Figur 5.2: Hvis vi kjenner til alle sidene i en trekant kan vi finne vinklene i trekanten.

En huskeregel for at man skal bruke cosinussetningen på vinkelen motstående den **lengste** siden er at cosinus er et **langt** ord, mens sinus er et kort ord.

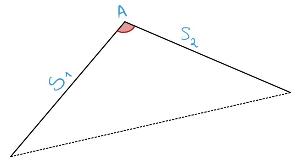
Teorem 5.3.1. *Hvis to trekanter har parvis like lange sider, så er de kongruente.*

Vi skal ikke bevise teoremet her, men forklare hvordan vi kan finne vinklene i trekanten. Siden vi kun kjenner til sidene i trekant, må vi bruke cosinussetningen.

1. Forklar hvorfor det er lurt å bruke cosniussetningen til å finne den vinklen som er motstående den lengste siden i trekanten.
2. Hvordan finner du de to resterende vinklene i trekanten?

5.3.2 Side-vinkel-side (SAS)

Det neste kongruensteoremet sier at dersom vi kjenner til to sider og deres mellomliggende vinkel, så kan vi bestemme trekanten. Det er viktig at vinkelen vi kjenner til ligger mellom de to sidene vi kjenner til, se figur 5.3.



Figur 5.3: Hvis vi kjenner til to sider og en deres mellomliggende vinkel, kan vi finne resten av vinklene og den siste siden.

Teorem 5.3.2. *Hvis to trekanter har to sider og deres mellomliggende vinkel like, så er de kongruente.*

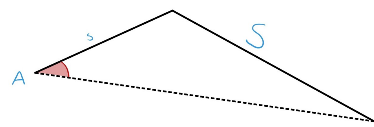
Vi skal nå se på hvordan vi kan bestemme den siste siden og de to siste vinklene til denne trekanten.

En huskeregel for at man skal bruke sinussetningen på den **minste** vinkelen er at sinus er et **kort** ord, mens cosinus er et langt ord.

3. Forklar hvorfor vi ikke kan bruke sinussetningen til å finne noen av vinklene eller den siste siden.
4. Hvilken ukjent størrelse kan vi finne ved å bruke cosinussetningen?
5. Forklar hvorfor vi burde bruke sinussetningen for å finne den minste av de to gjenværende vinklene. Hvordan vet vi hvilken gjenværende vinkel som er den minste?
6. Forklar hvordan vi finner den siste vinkelen.

5.3.3 Vinkel-kortest side-side (AsS)

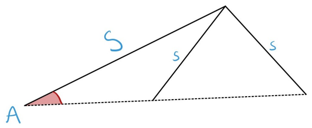
Det tredje kongruensteoremet har vi når vi kjenner til én vinkel og to sider der vinkelen ikke ligger mellom de to sidene og den siden som ligger ved vinkelen er minst av de to sidene vi kjenner til, se figur 5.4



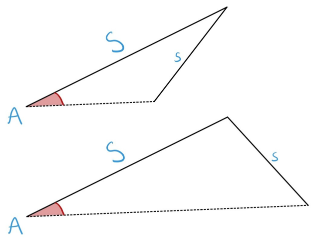
Figur 5.4: Det er viktig at den siden som ligger ved siden av vinkelen vi kjenner til er den minste av s og S.

Teorem 5.3.3. *Hvis to trekanter har én vinkel og to sider like, der bare den korteste siden ligger ved siden av vinkelen vi kjenner til, så er trekantene kongruente.*

7. Forklar hvorfor vi ikke burde bruke cosinussetningen til å finne den ukjente siden.
8. Forklar hvilken vinkel vi bør bruke sinussetningen for å finne.
9. Forklar hvordan vi finner den siste vinkelen.
10. Forklar hvordan vi finner den ukjente siden.



Figur 5.5: Det tvetydige tilfellet gir oss to trekanter.



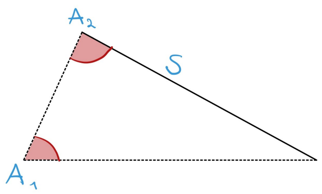
Figur 5.6: Begge trekantene

Det tvetydige tilfellet

Vi skal nå se på hvorfor vi må kreve at den siden som ligger ved vinkelen er den minste. Det er nemlig slik at dersom den siden som ligger ved vinkelen er den lengste så har vi ikke lenger et kongruensteorem. Det betyr at vi ikke lenger kan bestemme trekanten, fordi vi får to trekanter som ikke er kongruente, men som har den vinkelen og de to sidene som ble oppgitt.

7. Se på figur 5.5 og figur 5.6 og forklar hvorfor ASs er et tvetydig tilfelle, altså ikke et kongruensteorem.

5.3.4 Vinkel-vinkel-side (AAS)



Figur 5.7: Hvis vi kjenner til én side og to vinkler i en trekant, kan vi bestemme de resterende størrelsene.

Det siste kongruensteoremet sier at hvis vi kjenner til to vinkler og én side i en trekant, så kan vi finne den resterende vinkel og de restenerende sidene, se figur 5.7. Hvis vi kjenner til to vinkler i en trekant, kjenner vi egentlig til alle tre. Vi kan jo bare bruke vinkelsummen til en trekant for å finne siste vinkelen. Kongruensteoremet kan derfor også kalles AAAS. Fordi vi kjenner til alle tre vinklene i trekanten har vi et kongruensteorem uansett hvor siden vi kjenner til er plassert.

Teorem 5.3.4. *Hvis to trekanter har én side og to vinkler like, så er de kongruente.*

Vi ser på hvordan vi finner de resterende sidene.

8. Forklar hvorfor vi ikke kan bruke cosinussetningen til å finne de resterende sidene.
9. Forklar hvorfor vi ikke trenger finne den minste siden først, slik som vi måtte i tilfellene AsS og SAS.

6 | Romgeometri

6.1 Hva handler dette om?

Dette kapittelet handler for det første om å forklare hvorfor vi noen ganger bruker parametriske likninger og noen ganger koordinatlikninger til å beskrive mengder av punkter. For det andre handler kapittelet om å studere platonske legemer litt nærmere.

6.2 Parametriske likninger og koordinatlikninger

På skolen har vi lært at en linje i planet enten kan gis som en parametrisk likning eller som en koordinatlikning. For eksempel vil

$$r(t) = [0, 1] + [1, 1]t \tag{6.1}$$

$$f(x) = x + 1 \tag{6.2}$$

være den samme linjen i planet. Vi skal se litt nærmere på hva fordelene og ulempene ved å bruke disse to måtene er.

Definisjon 6.2.1. *En parametrisk likning for en linje i* $\mathbb{R}^n$ *er på formen*

$$\vec{x} = \vec{p} + t\vec{v},$$

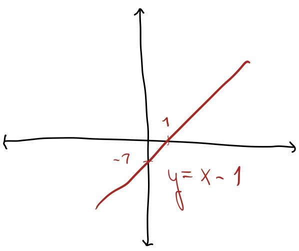
der $\vec{x} = (x_1, x_2, ..., x_n)$ *er et vilkårlig punkt på linjen og* $\vec{v}$ *er en retningsvektor til linjen.*

Definisjon 6.2.2. *En parametrisk likning for et plan i* $\mathbb{R}^n$ *er på formen*

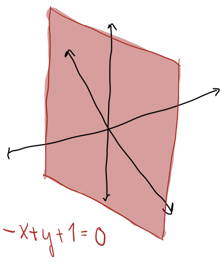
$$\vec{x} = \vec{p} + t\vec{v} + s\vec{u},$$

der $\vec{x} = (x_1, x_2, ..., x_n)$ *er et vilkårlig punkt i planet og* $\vec{v}$ *og* $\vec{u}$ *spenner ut planet.*

Det som er interessant ved disse definisjonene er at de gjelder for alle $\mathbb{R}^n$. Hvis du har en likning på formen $\vec{x} = \vec{p} + t\vec{v}$, så blir det en linje uansett om du befinner deg i $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^2$ eller $\mathbb{R}^3$. Slik er det ikke hvis vi bruker koordinatlikninger.



Figur 6.1: I $\mathbb{R}^2$ er $-x+y+1=0$ en linje.



Figur 6.2: I $\mathbb{R}^3$ er $-x+y+1=0$ et plan.

Definisjon 6.2.3. *En koordinatlikning er en likning på formen*

$$a_1x_1 + a_2x_2 + ... + d = 0,$$

der $a_i, d \in \mathbb{R}$ og x_i er koordinataksene.

Vi ser på et eksempel.

Eksempel 6.2.1. *Vi ser på likningen $-x+y+1=0$.*

Hvis vi befinner oss i $\mathbb{R}^2$ er dette likningen til en linje. Vi kan skrive den om til den kjente formen $y = x - 1$, se figur 6.1.

Befinner vi oss imidlertid i $\mathbb{R}^3$ representerer likningen et plan med normalvektor $n = (-1, 1, 0)$, se figur 6.2.

1. Forklar hva $x = 0$ er i henholdsvis $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^2$ og $\mathbb{R}^3$.
2. Forklar hvordan du kan lage en linje i planet og i rommet ved å bruke en parametrisk likning.
3. Forklar hvordan du kan lage en linje i rommet ved å bruke koordinatlikninger.
4. Forklar hvorfor det noen ganger kan være enklere å bruke parametriske likninger enn koordinatlikninger.

Man kan se på forkjellen mellom å bruke parametrisk likning og koordinatlikning som forskjellen på en maler og en billedhugger. En maler starter med et blank ark og maler et bilde ved å **legge på** farger. En billedhugger starter med en kloss og **hugger bort** deler av klossen. Når man bruker en parametrisk likning **legger man til** flere vektorer for å få en høyere dimensjon (linje, plan, flate), mens med en koordinatlikning begynner du i en gitt dimensjon og **tar bort** én dimensjon for hver likning man legger til.

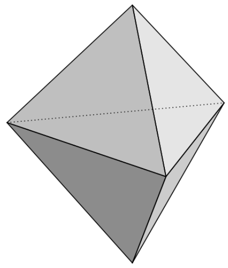
6.3 Platonske legemer

Vi skal nå se på de fem platonske legemene og bevise at det ikke fins flere enn disse fem. Først må vi definere hva et platonsk legeme er.

Definisjon 6.3.1. *Et platonsk legeme er et konvekst polyeder med kongruente, regulære sider der like mange sider møtes i hvert hjørne.*

1. Hvorfor er ikke en triangulær dipyramide et platonsk legeme? Se figur 6.3.

Det fins bare fem platonske legemer og vi skal både bevise hvorfor det kun er disse fem og vise en sammenheng mellom antall flater, hjørner og kanter til legemene. Vi ser nærmere på hvert av de platonske legemene for seg. Sammenhengen vi skal bevise er som følger:



Figur 6.3: En triangulær dipyramide er ikke et platonsk legeme.

Teorem 6.3.1 (Eulers identitet)**.** *Hvis F er antall flater, V antall hjørner og E antall kanter til et platonsk legeme, er*

$$F + V - E = 2$$

6.3.1 Tetraederet

Et tetraeder består av fire regulære trekanter der tre trekanter møtes i hvert hjørne, se figur 6.4. For å vise at Teorem 6.3.1 stemmer må vi telle antall flater, hjørner og kanter. Vi vil utvikle en metode for å telle disse, slik at vi ikke trenger å pugge dem, ei heller holde en 3D-representasjon i hånda, men klare å telle kun ved visualisering.

Et polygon er **regulært** dersom alle sidene og alle vinklene er like store.

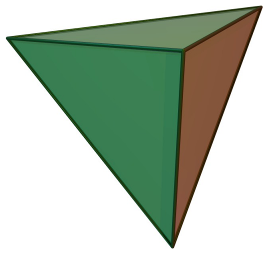
Antall flater

Vi begynner med én flate. Denne flaten er en trekant og vi har plass til én trekant for hver kant. Dermed får vi $1 + 3 = 4$ flater.

Tetra er gresk for fire og svarer til antall flater på et tetraeder.

Antall hjørner

Vi begynner med én flate som har tre hjørner. Flatene som er festet i denne trekantens kanter møtes i ett hjørne. Dermed får vi $3 + 1 = 4$ hjørner.



Figur 6.4: Et tetraeder er et platonsk legeme.

Antall kanter

Vi begynner med én flate. Denne flaten har tre kanter. Fra hvert hjørne i trekanten går det én kant slik at disse tre kantene møtes i pyramidens toppunkt. Dermed får vi $3 + 3 = 6$ kanter.

Til slutt får vi at $F + V - E = 4 + 4 - 6 = 2$, så Teorem 6.3.1 stemmer for tetraederet.

6.3.2 Oktaederet

Det neste platonske legemet vi skal se nærmere på er oktaederet, se figur 6.5. Det består av to firkantede pyramider laget av regulære trekanter. I hvert hjørne møtes fire trekanter. Vi finner antall flater, hjørner og kanter.

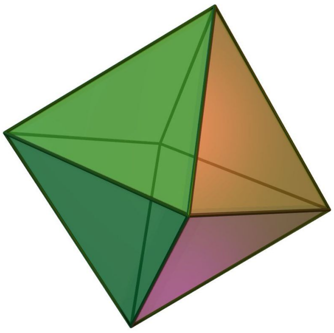
Okta er gresk for åtte og svarer til antall flater på et oktaeder.

Antall flater

Vi begynner i et hjørne. Til det hjørnet er det festet fire flater av trekanter. Til hver trekant kan vi feste én ny trekant. Disse fire trekantene møtes i toppunktet. Vi får dermed $4 + 4 = 8$ flater.

Antall hjørner

Vi begynner i et hjørne. Fra dette hjørnet går det fire kanter som ender i hjørnene til firkanten «inni» oktaederet. Fra denne firkanten går det fire kanter som samles i toppunktet. Vi får dermed $1 + 4 + 1 = 6$ hjørner.



Figur 6.5: Et oktaeder er et platonsk legeme.

Antall kanter

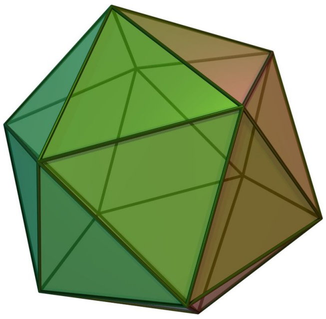
Vi begynner i et hjørne. Fra det hjørnet går det fire kanter. Disse ender i hjørnene til firkanten «inni» oktaederet. Denne firkanten har fire kanter. Fra de fire hjørnene i firkanten går det igjen fire kanter som møtes i toppunktet. Vi har dermed $4 + 4 + 4 = 12$ kanter.

Til slutt får vi at $F + V - E = 8 + 6 - 12 = 2$.

6.3.3 Ikosaederet

Ikosa er gresk for tjue og svarer til antall flater på et ikosaeder.

Et ikosaeder lages at vi har fem regulære trekanter som møtes i et hjørne. Til hver tilgjengelige kant fester vi én ny trekant. Vi lager to slike kurver og lar de møtes i de tilgjengelige kantene, se figur 6.6. Vi bruker samme metode som over til å finne antall flater, hjørner og kanter.



Figur 6.6: Et ikosaeder er et platonsk legeme.

Antall flater, hjørner og kanter

Vi begynner i et hjørne. I det hjørnet møtes fem flater av trekanter. Fra disse trekantene er det festet fem nye trekanter. Mellom disse trekantene er det festet fem trekanter. Fra disse er det også festet fem trekanter som møtes i toppunktet. Vi får dermed $5 + 5 + 5 + 5 = 20$ flater.

2. Forklar hvorfor et ikosaeder har $1 + 5 + 5 + 1 = 12$ hjørner.
3. Forklar hvorfor et ikosaeder har $5 + 5 + 10 + 5 + 5 = 30$ kanter.
4. Vis at Teorem 6.3.1 stemmer for ikosaederet.

6.3.4 Kuben

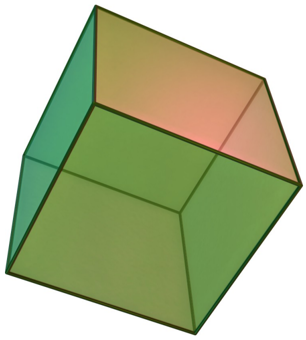
Heksa er gresk for seks og svarer til antall flater på et heksaeder.

Kuben eller heksaederet er det vi kjenner som en terning. Kuben består av regulære firkanter der tre og tre flater møtes i hvert hjørne, se figur 6.7.

Antall flater, hjørner og kanter

Siden vi kjenner kuben eller heksaederet som en terning vet vi at den har seks flater.

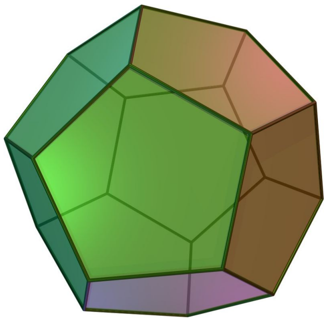
5. Forklar hvorfor kuben har $4+4=8$ hjørner.
6. Forklar hvorfor kuben har $4+4+4=12$ kanter.
7. Vis at Teorem 6.3.1 stemmer for kuben.



Figur 6.7: Et heksaeder er et platonsk legeme.

6.3.5 Dodekaederet

Det siste platonske legemet er dodekaederet. Vi får det ved å begynne med en regulær femkant. Til hver av kantene fester vi en ny femkant. Dette gjør vi to ganger slik at vi har to kurver. Disse fester vi sammen på samme måte som for ikosaederet, se figur 6.8.



Figur 6.8: Et dodekaeder er et platonsk legeme.

Antall flater, hjørner og kanter

For å finne antall flater begynner vi med én femkant. Til den er det festet fem femkanter. Til disse femkantene er det festet fem nye femkanter. Til slutt er det én femkant på toppen. Vi får dermed $1+5+5+1=12$ flater.

8. Forklar hvorfor et dodekaeder har $5+10+5=20$ hjørner.
9. Forklar hvorfor et dodekaeder har $5+5+10+5+5=30$ kanter.
10. Vis at Teorem 6.3.1 stemmer for dodekaederet.
11. Sammenlikn antall flater, hjørner og kanter til ikosaederet og dodekaederet.
12. Er det to andre platonske legemer som har en liknende sammenheng?

Dodeka er gresk for tolv og svarer til antall flater på et dodekaeder.

Figur 6.9: En video om hvorfor det bare fins fem platonske legemer.

6.4 Det fins bare fem platonske legemer

Måten vi viser at det kun fins fem platonske legemer og at disse fem er de vi har gått gjennom er ved å bruke definisjonen av et platonsk legeme til å konstruere alle mulige figurer som oppfyller definisjonen. Forsøk å løse oppgavene under. Se videoen i figur 6.9 dersom du trenger hjelp.

1. Forklar hvilke figurer vi får av å la hhv. tre, fire og fem regulære trekanter møtes i et hjørne. Hva skjer hvis vi lar seks eller flere regulære trekanter møtes i et hjørne?
2. Forklar hvilken figur vi får av å la tre regulære firkanter møtes i et hjørne. Hva skjer hvis vi lar fire eller flere regulære firekanter møtes i et hjørne?
3. Forklar hvilken figur vi får av å la tre regulære femkanter møtes i et hjørne. Hva skjer hvis vi lar fire eller flereregulære femkanter møtes i et hjørne?
4. Hva skjer hvis vi lar tre eller flere n-kanter for $n > 5$ møtes i et hjørne?

7 Kombinatorikk, sannsynlighet og statistikk

7.1 Hva handler dette om?

Dette kapittelet handler for det første om kombinatorikk. Vi ser på fire ulike måter å kombinere på. Særlig ser vi på antall kombinasjoner av de ulike pokerhendene. Videre ser vi på sannsynlighet, spesielt en rekke sannsynlighetsparadokser. Til slutt handler denne delen om noen begreper og konsepter i statistikk.

7.2 Kombinatorikk

7.2.1 Ordnet eller uordnet

Du husker kanskje fra før at antall kombinasjoner er avhengig av om vi bryr oss om rekkefølgen eller ikke. Hvis vi skal velge tre tall fra mengden $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ må vi vite om vi skiller på $\{1, 2, 3\}$ og $\{2, 3, 1\}$ eller ikke. Dette høres kanskje enkelt ut, vi ser bare på oppgaven om den spør etter antall kombinasjoner, ordnet eller uordnet. Men det er ikke alltid så lett.

1. ♠ Forklar hvorfor den følgende oppgaven både kan forstås som et spørsmål om ordnet og uordnet utvalg: En lærer har to oppgaver om algebra og tre oppgaver om geometri og vil lage en prøve med ett problem av hver type. Hvor mange mulige prøver kan læreren lage?

2. Diskuter om den følgende oppgaven er løst riktig: En mann har to barn, han kan enten ha to gutter, to jenter eller én av hver. Vi bruker regelen om at sannsynligheten for et utfall U er gitt ved

$$P(U) = \frac{\text{antall gunstige utfall}}{\text{antall mulige utfall}}$$

og får

$$P(\text{to gutter}) = \frac{1}{3}$$

3. Hva er problemet med den følgende oppgaven? Hva er problemet hvis svaret på den første oppgaven er 36 og svaret på den andre er $(1, 6)$?

   (a) Hvor mange utfall får du hvis du kaster to vanlige terninger?

   (b) Hvilket av disse utfallene er mest sannsynlig når du kaster to terninger?

      i. (1,6)
      ii. (6,6)
      iii. Begge utfallene er like sannsynlige

7.2.2 Fire typer prøvetakinger

Vi har fire måter å ta prøver på. Vi har både ordnet og uordnet og med eller uten tilbakelegging. Fyll inn skjemaet under med formlene for de ulike prøvetakingene.

	Med tilbakelegging	Uten tilbakelegging
Ordnet		
Uordnet		

4. ♠ Forklar hvordan man kommer fram til hver av de fire formlene.
5. ♠ Se på sammenhengen mellom ordnet og uordnet når vi har med tilbakelegging. Hvorfor har vi ikke en tilsvarende sammenheng mellom ordnet og uordnet når vi ikke har tilbakelegging? (forklar altså hvorfor formelen for uordnet med tilbakelegging ikke er $\frac{n^k}{k!}$)
6. ♠ Forklar hvordan man kan tolke følgende oppgave som hver av de fire samplingsmulighetene: I en klasse er det tre jenter og to gutter. Du velger to elever. Hva er sannsynligheten for at du velger to jenter?
7. Forklar hvorfor sannsynlighetene er uavhengig av om du ser på situasjonene som ordnet eller uordnet.

7.2.3 Pokerhender

En måte å teste ut om man forstår kombinatorikk og en morsom aktivitet for elevene er å regne ut antall kombinasjoner som gir de ulike pokerhendene. I poker sitter du igjen med fem kort på hånda, og det er hva disse fem kortene er som avgjør hvilken pokerhånd du har og dermed om du vinner eller ikke. I poker har både verdien på kortet og fargen, eller valøren, betydning. Måten vi regner ut antall kombinasjoner er ved først å se på antall kombinasjoner av verdiene som gir pokerhånda og multiplisere det man antall kombinajoner av valørene.

Eksempel 7.2.1. *Regn ut antall kombinasjoner av straight flush.*

Straight vil si at du har fem kort som er etter hverandre i kortstokken og flush betyr at du har alle fem kortene i samme farge. Straight flush vil si at du har fem kort som er etter hverandre i kortstokken og alle er i samme farge.

Vi teller antall straight ved å se på hvor mange kort en straight kan starte på. Den kan starte på $\{A, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$, altså ti muligheter eller $\binom{10}{1}$. Når det gjelder valøren kan vi ha alle valørene, men hvert av de fem kortene må ha samme valør. Alle fem er enten hjerter, kløver, spar eller ruter. Det er altså fire muligheter, eller $\binom{4}{1}$. Når vi kombinerer verdi og valør får vi

$$\binom{10}{1} \cdot \binom{4}{1} = 40.$$

I dette eksempelet brukes alle de fem kortene til å oppnå pokerhånda. I det neste eksempelet er det ett «fritt» kort.

Eksempel 7.2.2. *Regn ut antall kombinasjoner av to par.*

Vi ser først på verdiene. Vi har tretten verdier å velge fra og siden vi skal ha to par, trenger vi to verdier. Antall kombinasjoner av verdier for to par er dermed $\binom{13}{2}$*. Hvilken valør kan disse kortene ha? De to kortene i samme par må naturligvis ha ulik valør (det er bare ett kort i hver valør i hver verdi), men det er det samme hvilken kombinasjon av valør kortene har. Vi får dermed* $\binom{4}{2}$*. Det samme gjelder for det andre paret. Antall kombinasjoner av to par blir dermed* $\binom{13}{2} \cdot \binom{4}{2}^2$*. I poker er det som nevnt fem kort, så vi må også ta med det siste kortet i beregningen. Dette kortet kan i utgangspunktet være hva som helst, men det kan ikke ha samme verdi som en av verdiene vi har par i. Derfor har vi bare 11 verider å trekke fra. Valøren kan være hvilken som helst av de fire typene. Vi får dermed*

$$\binom{13}{2} \cdot \binom{4}{2}^2 \cdot \binom{11}{1} \cdot \binom{4}{1} = 123552$$

8. Regn ut antall kombinasjoner av følgende pokerhender
   (a) Fire like
   (b) Hus (to like og tre like)
   (c) Flush (husk at straight flush ikke er en flush)
   (d) Straight (husk at straight flush ikke er en straight
   (e) Fire like
   (f) Tre like
   (g) To par
   (h) Ett par
   (i) Høyt kort (altså at du ikke har noen av de nevnte pokerhendene)

7.3 Sannsynlighetsparadokser

7.3.1 Simpsons paradoks

Simpsons pardoks er et fenomen i statistikk som oppstår når man ser på et datasett og at den sammenhengen man ser mellom grupper forsvinner når man ser på gruppene som helhet, se videoen i figur 7.1.

Figur 7.1: En video om Simpsons paradoks.

1. På Universitetet California Berkely tok de inn 44% av de mannlige søkerne og 34% av de kvinnelige søkerne. I utgangspunktet kunne det se ut som kjønnsdiskriminering. Ser man imidlertid på statistikken for de seks største avdelingene på universitetet fikk man et annet bilde av saken, se figur 7.2. Forklar hvordan dette kan ha seg ved å bruke figur 7.3.

2. Tenk deg at du underviser en klasse med 20 vanlige elever og fem elever med varierende grad av lærevansker. De vanlige elevene får 80 av 100 på en test og de andre får 50 av 100. Klassens gjennomsnitt er 74 av 100. Rektor er imponert av deg og neste år får du ti elever med lærevansker. Dette året øker resultatene til de vanlige elevene til 82 av 100 og de andre elevene til 52 av 100. Du er fornøyd, men rektor er ikke det, for gjennomsnittet har sunket til 70 av 100. Kan du forklare paradokset?

3. Tenk deg at du har 20 mannlige og fem kvinnelige ingeniører og 15 mannlige og ti kvinnelig lærere. Se på figur 7.4 som viser gjennomsnittlig inntekt mellom de fire gruppene arbeidstakere. Det er et paradoks at gjennomsnittsinntekten til menn er høyere enn gjennomsnittsinntektene til kvinner, mens kvinnelige lærere tjener mer enn mannlige lærere og kvinnelige ingeniører tjener mer enn mannlige ingeniører. Forklar paradokset.

Department	Male acceptance rate	Female acceptance rate
A	62%	82%
B	63%	68%
C	37%	34%
D	33%	35%
E	28%	24%
F	6%	7%

Figur 7.2: Data fra de seks største avdelingene på Universitetet i California Berkely, 1973.

	Male		Female	
	Applicants	%	Applicants	%
A	825	62%	108	82%
B	560	63%	25	68%
C	325	37%	593	34%
D	417	33%	375	35%
E	191	28%	393	24%
F	373	6%	341	7%

Figur 7.3: Data fra de seks største avdelingene på Universitetet i California Berkely, 1973 med antall søkere.

	Men	Women
Engineers	$ 80,000	$86,000
Teacher	$40,000	$43,000
Average	$62,857	$57,333

Figur 7.4: Oversikt over gjennomsnittsinntekt for kvinnelige og mannlige lærere og ingeniører.

7.3.2 Får man flere gutter bare ved å ønske det?

Tenk deg et samfunn som har en preferanse for gutter, så alle familier får barn helt til de får en gutt. Vi kan anta at familien uansett stopper å få barn når de har fått fire barn. Vil det bli noen forskjell i antall gutter og antall jenter i dette samfunnet?

Måten vi løser dette problemet på er å regne ut forventningen av antall gutter og jenter i hver familie og sammenlikne svarene. Fyll inn sannsynligheten for hvert tilfelle i tabellen under.

Antall barn	Gutter	Jenter	Sannsynlighet
1	1	0	
2	1	1	
3	1	2	
4	1	3	
4	0	4	

4. Regn ut forventet antall gutter basert på denne tabellen. Husk at vi regner ut forventningen ved å bruke formelen $E(\text{antall gutter}) = \sum_{i=1}^{4} i \cdot P(i)$, der i er antall gutter.
5. Regn ut forventet antall jenter basert på denne tabellen. Husk at vi regner ut forventningen ved å bruke formelen $E(\text{antall jenter}) = \sum_{i=1}^{4} i \cdot P(i)$, der i er antall jenter.
6. Vil det bli noen forskjell i antall gutter og antall jenter i dette samfunnet?
7. Hva blir resultatet hvis familiene ikke stopper ved fire barn, men fortsetter å få barn til de får en gutt?

7.3.3 Monty Hall og liknende paradokser

Vi skal nå se på en familie av paradokser som alle egentlig er tilsvarende Monty Hall-paradokset. Monty Hall-paradokset går ut på at du er med på et game show og blir bedt om å velge én dør blant tre dører. Bak én av dørene står det en bil, så det er denne døra du vil velge. Du velger først én av dørene. Game show-verten åpner én av de to dørene du ikke valgte (hun kan ikke åpne døren med en bil bak) og spør om du vil bytte døren du valgte til den døren hun ikke åpnet. Spørsmålet er om det lønner seg for deg å bli værenede eller bytte dør.

Figur 7.5: En video av Monty Hall-paradokset.

Vi tenker oss at vi gjør dette forsøket 300 ganger. Vi antar det er tilfeldig hvilken dør bilen er bak, så den vil være bak dør A i 100 tilfeller, dør B i 100 tilfeller og dør C i 100 tilfeller. Tenk deg at du velger dør A hver gang. I 100 tilfeller er bilen bak dør A og verten kan velge enten dør B eller dør C. Vi antar at hun foretar et tilfeldig valg og velger dør B 50 ganger og dør C 50 ganger. I 100 tilfeller er bilen bak dør B, så verten må velge å åpne dør C (hun kan ikke åpne døra du valgt og heller ikke den der bilen er). På samme måte er bilen bak dør C i 100 tilfeller, da må verten åpne dør B. Vi ser at altså at ved å gjøre forsøket 300 ganger åpner verten dør B 150 ganger og dør C 150 ganger. Men av disse 150 gangene er det 100 ganger fordi verten ikke hadde noe annet valg. Grunnen til at hun åpnet den døra hun åpnet er altså i $\frac{100}{150}$ ganger fordi hun ikke hadde et valg. Det er altså $\frac{2}{3}$ sannsynlighet for at hun ikke hadde et valg da hun åpnet en dør. Derfor er det $\frac{2}{3}$ sannsynlig at bilen er bak den døra hun ikke åpnet, altså burde du bytte dør.

Tobarnsparadokset

Tenk deg følgende to situasjoner. En mann har to barn.

- Du spør mannen om han har minst én gutt og han sier ja.
- Du møter mannen på gata og ser at han har med seg et barn som er en gutt.

8. Finn sannsynligheten for at mannen har to gutter for hver av de to situasjonene over.
9. Hvilken av situasjonene over er tilsvarende Monty Hall-paradokset?

Tre fanger-paradokset

Tenk deg at du er én av tre fanger og at én av dere er blitt benådet. Du vet ikke hvem av dere som er blitt benådet, men du får lov til å spørre bøddelen om å si én av de andre to som ikke er blitt benådet. Bøddelen navngir én av de to som ikke er blitt benådet. Du er glad for nå har sannsynligheten for at du blir benådet økt.

10. Forklar hvorfor du har tenkt feil og at det nå er større sannsynlighet for at du **ikke** blir benådet.

Bertrands boksparadoks

Du har tre kort. Det første kortet er hvitt på begge sider, det andre kortet er svart på begge sider og det tredje er svart på den ene siden og hvitt på den andre. Du trekker et kort og ser bare på den ene siden. Det er svart.

11. Er det mest sannsynlig svart eller hvit på baksiden av kortet du trakk?

7.3.4 To ess-paradokset

Tenk deg at du har fire kort. Ett spar ess, ett kløver ess, én spar to og én kløver to. Du trekker to kort og får minst ett ess. Se på følgende situasjoner.

- Du sier at du har minst ett ess.
- Du sier at du har ett spar ess.

Figur 7.6: En video av to ess-paradokset.

12. Regn ut sannsynligheten for at du har to ess gitt de to situasjonene over.
13. Gjør som oppgaven over, men tenk deg at du har en hel kortstokk, ikke bare de fire kortene.

7.3.5 Bertrands sirkelparadoks

Bertrands sirkelparadoks handler om at vi har en likesidet trekant innskrevet i en sirkel og trekker en tilfeldig korde gjennom sirkelen. Vi lurer på sannsynligheten for at denne korden er lengre enn én av sidene i trekanten. Les vedlegget om Bertrands sirkelparadoks og besvar spørsmålene under.

14. Forklar hvorfor sannsynligheten kan være $\frac{1}{2}$.
15. Forklar hvorfor sannsynligheten kan være $\frac{1}{3}$.
16. Forklar hvorfor sannsynligheten kan være $\frac{1}{4}$.

7.4 Sannsynlighetshistorie

Her skal vi se på to problemer fra tidlig sannsynlighetshistorie. Problemene kalles Chevalier de Mérés to problemer siden det var han som stilte spørsmålene.

Chevalier de Mérés første problem

Er det sant at sannsyligheten for å få minst én sekser på fire kast med én terning er over 50%*, men at sannsynligheten for å få to seksere minst én gang når du kaster to terninger* 24 *ganger er mindre enn* 50%*?*

Figur 7.7: Gerolamo Cardano (1501-1576).

1. Matematikeren Gerolamo Cardano mente han hadde løst Chevalier de Mérés første problem. Siden sannsynligheten for å få én sekser er $\frac{1}{6}$ tenkte Cardano at man ville få en sekser på hvert sjette kast. Dermed var det 50% sjanse for å få (minst) én sekser på tre kast. Videre er sannsynligheten for å få to seksere $\frac{1}{36}$ når man kaster to terninger. Altså vil man få to seksere for hvert 36. kast og sannsynligheten for (minst) to seksere ville være 50% etter 18 kast. Forklar hva som var feil med Cardanos resonnenment.

2. Chevalier de Mérés mente Cardano tok feil og at man må kaste en terning fire ganger for at sannsynligheten for å få minst én sekser er 50%. Han brukte dette forholdet til også å regne ut hvor mange kast man trenger for at sannsynligheten for å få to seksere ved kast av to terninger er over 50%. Siden man ved sikkerhet ville få minst to seksere etter 36, ville man trenge $36 \cdot \frac{4}{6} = 24$ kast for 50% sannsynlighet. Hva er feil i dette resonnementet?

3. Løs problemet.

Chevaliers de Mérés andre problem

To personer spiller et spill der spillerne har lik sjanse for å vinne hver runde og vinneren er den som først vinner seks runder. Hvordan skal premien fordeles hvis spillet blir avbrutt når stillingen er $5 - 2$*?*

En matematiker kalt Luca Pacioli forslo at premien skulle deles etter hvor mange runder hver spiller hadde vunnet. Dermed ville den ene spilleren få $\frac{5}{7}$ av premien og den andre få $\frac{2}{7}$ hvis spillet ble avbrutt ved $5 - 2$.

Matematikeren Niccolo Tartaglia mente dette ikke var noen god løsning. Hvis spillet skulle bli avbrutt ved stillingen $1 - 0$ ville den ene få hele premien selv om han var nesten like langt unna å vinne spillet som den andre. Tartaglia forslo at hvis den ene leder med tre poeng, som er halvparten av det som trengs for å vinne, burde han få halvparten av de den andre la inn i potten. Altså ville den som leder få $\frac{3}{4}$ av potten og den andre $\frac{1}{4}$. Problemet med denne løsninger er at man da behandler stillingene $5 - 2$ og $3 - 0$ likt.

Cardano fant ut at man i stedet burde se på hvor mange runder hver av spilleren må vinne for å vinne spillet heller enn å se på hvor mange runder de hadde vunnet. Han klarte imidertid ikke å lage et argument for fordelingen.

En som klarte å lage et argument for hvordan potten skulle fordeles basert på hvor mange runder hver spiller måtte vinne for å vinne spillet var Pascal. Han antok at potten var på 80 og at stillingen var $5 - 4$. Hvis han som leder (A) vinner neste runde vinner han spillet, mens hvis han andre (B) vinner blir det uavgjort. Dermed ville det være rimelig at at man deler potten i to og at A får dene halvdelen og halvparten av den andre. Altså blir fordelingen $40 + 20 = 60$ til A og $0 + 20 = 20$ til B. Anta videre at stillingen var $5 - 3$. Enten så vinner A og vinner også hele spillet eller så vinner B og vi får stillingen $5 - 4$. Igjen deler vi potten i to. A får hele av den ene delen og $\frac{60}{80}$ av den andre delen. Dermed blir fordelingen $40 + 40 \cdot \frac{6}{8} = 40 + 40\frac{3}{4} = 40 + 30 = 70$ og B får 10.

4. Regn ut fordelingen hvis potten er på 80 og stillingen er
   (a) $5 - 2$
   (b) $4 - 3$
   (c) $4 - 2$

7.5 Bayes' setning

I denne seksjonen skal vi bevise Bayes' setning og forklare hva den brukes til. Før vi ser på setningen må vi se på hva betinget sannsynlighet er.

7.5.1 Betinget sannsynlighet

Betinget sannsynlighet vil si at vi regner ut sannsynligheten for A skjer gitt at B har skjedd. Vi skriver denne sansnynligheten $P(A \mid B)$. Vi kan visualisere dette ved å se på utfallene i et Venn-diagram. I det første bildet overlapper ikke hendelsene A og B. Siden utfallene ikke overlapper vil det ikke ha noe for sannsynligheten for at A skjer om B har skjedd eller ikke. Et eksempel på en slik situasjon er at $A = \{\text{du får en sekser på terningen}\}$ og $B = \{\text{terningen din er rød}\}$. Sannsynligheten for $P(A \mid B) = P(A)$.

1. Hva kaller vi hendelse der $P(A \mid B) = P(A)$?
2. Hvis $P(A|B) = P(A)$, er da også $P(B \mid A) = P(B)$?

Vi skal nå se på situasjonen når utfallsrommene til A og B overlapper. Når vi skal regne ut $P(A \mid B)$ må vi tenke oss at vi allerede er i utfallsrommet til B og at vi nå skal finne sannsynligheten for at vi er i den delen som overlapper med A. Det er rimelig å se på hvor stor andel av $A \cap B$ som ligger i B. Vi kan også gjøre om dette til sannsynlighet og får dermed en definisjon av betinget sannsynlighet.

Definisjon 7.5.1. *Hvis vi har at $P(B) \neq 0$ og $A \cap B \neq \emptyset$, er*

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

7.5.2 Bayes' setning

Bayes' setning er et redskap man kan bruke dersom man skal finne sannsynligheten $P(A \mid B)$ og kjenner til sannsynligheten $P(B \mid A)$.

Teorem 7.5.1. *Anta $P(B) \neq 0$. Da er*

$$P(A \mid B) = \frac{P(B \mid A) \cdot P(A)}{P(B)}$$

3. Bevis Bayes' setning ved å bruke definisjonen av betinget sannsynlighet.

7.6 Statistikk

I denne seksjonen skal vi se på noen begreper knyttet til statistikk. For å gjøre oppgavene er det noen formler som kan være greit å huske. Her er to regneregler for sum av forventing og varians til to stokastiske variabler.

$$E(X+Y) = E(X) + E(Y)$$
$$\mathrm{Var}(X+Y) = \mathrm{Var}(X) + \mathrm{Var}(Y)$$

1. Tenk deg at du kaster en mynt 10000 ganger. Du skriver opp antall ganger du får mynt (M) og kron (K). Hva kan du si om $M - K$?
2. ♠ Hva kan du si om forventingen til $M - K$?
3. ♠ Hva kan du si om variansen til $M - K$?
4. ♠ Hvor stor må forskjellen mellom antall mynt og antall kron, $M - K$, være før du bør tenke at det er noe feil med mynten du bruker?

8 Analyse

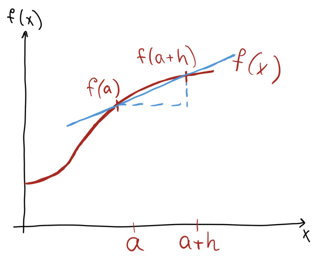
8.1 Hva handler dette om?

Dette kapittelet handler for det første om derivasjon. Vi diskuterer utsagnet om at polynomderivasjon er polynomdivisjon, vi utleder den deriverte av $\sin(x)$ og ser på definisjonen av e. Videre ser vi på definisjonene av ekstremalpunkt og vendepunkt og ser hvilke egenskaper ved funksjonen som er nødvendige eller tilstrekkelige for at vi har slike punkter.

8.2 Derivasjon

8.2.1 Polynomderivasjon er polynomdivisjon

Vi skal vise hva vi mener med at polynomderivasjon egentlig er polynomdivisjon. Poenget med å vise dette å se at vi ikke trenger å kjenne til konseptet om grenseverdier for å polynomderivere. Dette gjør at vi kan introdusere elever for polynomderivasjon uten først å introdusere dem for grenseverdier. Vi begynner med definisjonen av den deriverte.



Figur 8.1: Illustrasjon til utledning av definisjonen av den deriverte.

Definisjon 8.2.1. *Den deriverte til funksjonen $f(x)$ i punktet $x = a$ er*

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

1. Utled definisjonen av den deriverte selv ved å bruke illustrasjonen i figur 8.1.

Vi skal nå vise at vi ikke trenger å regne ut noen avansert grenseverdi når det er et polynom vi skal derivere.

Eksempel 8.2.1. *Vi skal finne den deriverte til $f(x) = x^2 + x + 1$ i punktet $x = a$. Vi skriver opp definisjonen av den deriverte.*

$$\begin{aligned}
f'(a) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{((a+h)^2 + (a+h) + 1) - (a^2 + a + 1)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{(a^2 + 2ah + h^2 + a + h + 1) - (a^2 + a + 1)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{2ah + h^2 + h}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{h(2a + h + 1)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} 2a + h + 1 \\
&= 2a + 1
\end{aligned}$$

Vi ser at h-en i nevneren ble forkortet mot en h i telleren. Dermed ble grensen veldig lett å regne ut, vi setter bare $h = 0$. Dette vil alltid skje når funksjonen vi deriverer er et polynom. Vi skal vise dette generelt. Før vi kan vise dette trenger vi et resultat om faktorisering av polynomer.

Teorem 8.2.1. *$f(a) = 0$ hvis og bare hvis $f(x) = (x - a)q(x)$.*

Teoremet sier bare noe vi kjenner til fra før. Hvis a er en rot eller løsning til et polynom kan man skrive polynomet som et produkt av $(x - a)$ og et annet polynom. Siden dette er et «hvis og bare hvis»-teorem, så vi må bevise teoremet begger veier.

Bevis. Anta at $f(x) = (x - a)q(x)$.

2. Vis at $f(a) = 0$.

Vi skal nå anta at $f(a) = 0$ og vise at $f(x) = (x - a)q(x)$. Vi bruker et resultat vi ikke beviser, men som vi benytter oss av når vi utfører polynomdivisjon. Resultatet sier at hvis vi deler $g(x)$ på $f(x)$ får vi generelt at

$$f(x) = g(x) \cdot q(x) + r(x),$$

der $r(x)$ har grad mindre enn $g(x)$. Graden til et polynom er den største eksponenten x er opphøyd i.

3. Sjekk at teoremet stemmer ved å regne ut $x^3 + x + 1 : (x - 1)$

Vi skal bruke dette resultatet med $g(x) = (x - a)$. Vi kan jo velge hva vi vil dele et polynom på, og vi velger å dele på $(x - a)$. Da får vi at

$$f(x) = (x - a) \cdot q(x) + r(x),$$

der $r(x)$ har mindre grad enn $(x - a)$. Siden $(x - a)$ har grad 1 har $r(x)$ grad 0. Et polynom av grad 0 er en konstant. Vi vet altså at $f(x) = (x - a) \cdot q(x) + r$.

4. Bruk antakelse om at $f(a) = 0$ og vis at $r = 0$.

5. Forklar at vi nå har bevist teoremet.

■

Vi kan nå bevise at det som skjedde i eksempel 9.2 (altså at h-en i nevneren forkortes bort) skjer for et generelt polynom.

Teorem 8.2.2. *Hvis $f(x)$ er et polynom, er*

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = q(0),$$

der $q(h)$ er slik at $f(a+h) - f(a) = q(h) \cdot h$.

Bevis. Vi setter $p(h) = f(a+h) - f(a)$. Vi behandler altså $p(h)$ som en funksjon av h. Vi ser at hvis vi setter $h = 0$ er $p(h) = 0$. Vi bruker Teorem 8.2.1 og ser at fordi $p(0) = 0$ kan vi skrive $p(h) = (h - 0) \cdot q(h) = h \cdot q(h)$. Vi får dermed at

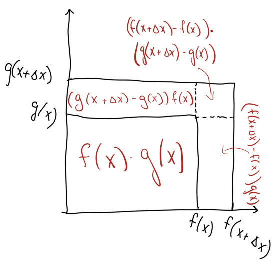
$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h \cdot q(h)}{h} = \lim_{h \to 0} q(h) = q(0)$$

■

6. Forklar utsagnet «polynomderivasjon er polynomdivisjon».

8.2.2 Produktregelen

I denne seksjonen skal vi bevise produktregelen for derivasjon. Vi kan bevise produktregelen ved å bruke definisjonen av den deriverte på funksjonen $h(x) = f(x) \cdot g(x)$. For å komme fram til produktregelen på den måten må man gjøre noen triks som kanskje ikke virker så intuitive. Vi skal derfor gi et annet bevis der vi bruker illustrasjonen i figur 8.2 til å utlede regelen.



Figur 8.2: Illustrasjon til utledning av produktregelen.

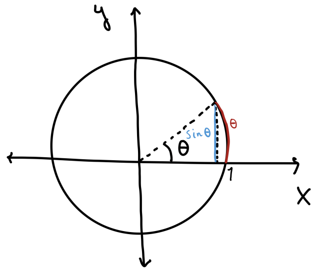
Teorem 8.2.3 (Produktregelen)**.** *Hvis den deriverte av $f(x)$ og $g(x)$ er $f'(x)$ og $g'(x)$, er den deriverte av $h(x) = f(x) \cdot g(x)$ lik $f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$.*

Bevis. Vi ønsker å finne ut hvor mye arealet til rektangelet endrer seg når vi endrer Δx. Det vil si at vi vil finne

$$\frac{\Delta A(x)}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) \cdot g(x + \Delta x) - f(x) \cdot g(x)}{\Delta x} \tag{8.1}$$

7. Bruk figur 8.2 til å finne et uttrykk for Likning (8.1).
8. La $\Delta x \to 0$ og fullfør beviset.

■



Figur 8.3: Illustrasjon til utledning av $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

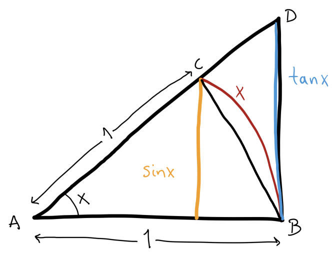
8.3 Trigonometriske funksjoner

8.3.1 Den deriverte av sinus

Vi skal nå vise at den deriverte av sinus er cosinus. Etter man har vist det kan man bruke derivasjonsegler til å finne de deriverte av andre trigonometriske funksjoner. For å finne den deriverte av sinus trenger vi å kjenne grensen

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}.$$

Nå tenker du kanskje at denne grensen kjenner vi til, vi bruker bare L'Hôpitals regel og deriverer opp og nede, lar x gå mot null og får at grensen er 1. Men dette fungerer ikke nå. Vi skal jo bruke denne grensen til å finne den deriverte av sinus, så vi kan jo ikke bruke den deriverte av sinus til å finne grensen.



Figur 8.4: Illustrasjon til utledning av $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

1. Se på figur 8.3 og forklar hvorfor $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$. Merk at du her benytter deg av at vi måler vinkelen i radianer.

Radianer er definert som buelengden delt på radius. I enhetssirkelen vil derfor buelengden være lik vinkelen til sirkelsektoren målt i radianer.

Vi skal se på en litt mer komplisert, men en mer presis, måte å regne ut grensen på. Måten vi skal gjøre det er å vise at $\frac{\sin x}{x}$ både er større enn eller lik 1 og mindre enn eller lik 1 når $x \to 0$. Den eneste måten dette kan oppfylles på er at $\frac{\sin x}{x} = 1$ når $x \to 0$.

2. Sammenlikn arealene til trekantene i figur 8.4 og vis at $\frac{1}{2}\sin x < \frac{x}{2} < \frac{1}{2}\tan x$.
3. Vis at $\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1$ og konkluder med at $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

Vi kan nå gå videre og finne den deriverte av sinus. Til dette trenger vi to identiteter vi kjenner fra før.

$$\sin(u+v) = \sin u \cdot \cos v + \sin v \cdot \cos u \tag{8.2}$$

$$\sin^2 u + \cos^2 u = 1 \tag{8.3}$$

Vi begynner med definisjonen av den deriverte.

$$\lim_{h\to 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h}$$

4. Bruk Likning (8.2) til å skrive om telleren.
5. Del grensen opp i to summer slik at det ene leddet er multiplisert med $\sin x$ og det andre med $\cos x$.

Vi ser nå kun på leddet med $\sin x$.

$$\lim_{h\to 0} \sin x \cdot \frac{\cos h - 1}{h}$$

6. Utvid brøken med $\cos h + 1$ og bruk Likning (8.3).
7. Forklar at dettet leddet går mot 0 når $h \to 0$.
8. Forklar at vi nå har vist at den deriverte av $\sin x$ er $\cos x$.

8.4 Definisjonen av e

Vi skal nå forklare hvor definisjonen av e kommer fra og bevise at e faktisk eksisterer.

Definisjon 8.4.1. *Tallet e er definert som grensen*

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

1. ♠ Finn ut hvor denne definisjonen kommer fra. Hint: Renters renter.

Vi skal bevise at uttrykket vi har definert e som, eksisterer. Ved første øyekast kan det se ut som at $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ går mot uendelig når $n \to \infty$, men det er ikke tilfellet. For å bevise at uttrykket konvergerer skal vi bruke et resultat fra kalkulus. Resultatet sier at en følge konvergerer dersom den er monoton og begrenset. Monton betyr at leddene enten blir større og større eller mindre og mindre når $n \to \infty$. I vårt tilfelle vil leddene bli større og større. Vi viser hvert av vilkårene for seg.

8.4.1 Monoton voksende

Det vi skal vise nå er at hvis vi ser på $s_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ og $s_{n+1} = \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}$ så er $s_{n+1} > s_n$, altså at følgen er voksende. Dette er vanskelig å vise direkte. Derfor skal vi bruke et triks og skrive om denne potensen til en sum ved bruk av binomialformelen.

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} a^{n-k} b^k \binom{n}{k}$$

Vi bruker denne på s_n og får

$$\begin{aligned}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = {} & 1^n \left(\frac{1}{n}\right)^0 \binom{n}{0} + 1^{n-1}\left(\frac{1}{n}\right)^1 \binom{n}{1} + 1^{n-2}\left(\frac{1}{n}\right)^2 \binom{n}{2} \\ & + 1^{n-3}\left(\frac{1}{n}\right)^3 \binom{n}{3} + \dots + 1^0 \left(\frac{1}{n}\right)^n \binom{n}{n}.\end{aligned}$$

Vi rydder litt opp og får

$$1 + 1 + \frac{1}{n^2}\frac{n\cdot(n-1)}{2!} + \frac{1}{n^3}\frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)}{3!} + \dots + \frac{1}{n^n}\frac{n\cdot(n-1)\cdots 1}{n!}.$$

Det kan se litt rart ut at vi skriver ut telleren i faktorer, mens vi skriver nevneren som fakultet, men bare vent, du skjønner hvorfor!

2. Hvorfor ble de to første leddene begge 1?
3. Vis at $\frac{1}{n^2}\cdot n\cdot(n-1) = \left(1-\frac{1}{n}\right)$
4. Vis at $\frac{1}{n^3}\cdot n\cdot(n-1)\cdot(n-2) = \left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)$
5. Hva er $\frac{1}{n^n}\cdot n\cdot(n-1)\cdots 1$?

Vi kan nå skrive s_n som

$$\begin{aligned} s_n = {} & 1 + 1 + \frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right) + \dots \\ & + \frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{n}\right)\end{aligned}$$

6. Finn et uttrykk for s_{n+1} og forklar at $s_{n+1} > s_n$.

Vi har nå vist at $\{s_n\}$ er voksende.

8.4.2 Begrenset

For å vise følgen er begrenset må vi finne et tall som hvert element i følgen alltid er mindre enn uansett hvor stor n er. Vi har gjort om hvert element i følgen fra et produkt til en sum. Vi kan nå sammenlikne hvert ledd i summen med leddene i en rekke vi kjenner summen til. Vi skal faktisk sammenlikne leddene med to rekker. Den første rekken vi skal sammenlikne med er

$$t_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}.$$

Vi skriver ut leddene i følgen $\{t_n\}$.

$$t_n = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + ... + \frac{1}{n!}$$

7. Hvilken rekke er størst av t_n og s_n?

Nå skal vi sammenlikne t_n med en kjent rekke. Det er en geometrisk rekke som vi kjenner summen til.

$$g_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k} \tag{8.4}$$

8. Bruk formelen for summen til en geometrisk rekke og regn ut summen til Likning (8.4).
9. Sammenlikn t_n med $1 + g_n$ of forklar at $t_n < 3$.
10. Forklar at $s_n < 3$.

Vi har nå vist at $\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ er monoton og begrenset og er derfor en konvergent følge. Det gir altså mening å definere e til å være denne grensen.

8.4.3 Den deriverte av e^x

På samme måte som vi definerte e, kan vi også definere e^x.

Definisjon 8.4.2.

$$e^x = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n.$$

Vi kan også se på e^x som en funksjon der $f(x) = e^x$ er et spesialtilfelle av $f(x) = a^x$, $a \in \mathbb{R}$. En interessant egenskap ved e^x er at den er sin egen derivert. Det er også den eneste eksponentialfunksjonen som har denne egenskapen. i viser dette ved bruk av definisjonen av den deriverte.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h\to 0}\frac{e^{x+h}-e^x}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{e^x\cdot e^h - e^x}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{e^x(e^h-1)}{h} \\ &= e^x\lim_{h\to 0}\frac{e^h-1}{h} \end{aligned}$$

Vi skal nå bytte ut e i grenseverdien med definisjonen av e og vise at grensen går mot 1.

$$\lim_{h\to 0}\frac{\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{h}{n}\right)^n - 1}{h}$$

Vi gjør som da vi viste at e eksisterer og skriver produktet som en sum.

$$\lim_{h\to 0}\frac{\lim_{n\to\infty} 1 + \left(\frac{h}{n}\right)^1\binom{n}{1} + \left(\frac{h}{n}\right)^2\binom{n}{2} + ... + \left(\frac{h}{n}\right)^n\binom{n}{n} - 1}{h}$$

11. Vis at denne grensen er 1.
12. Forklar at vi nå har vist at den deriverte av e^x er e^x.

8.5 Ekstremalpunkt og vendepunkt

I denne seksjonen skal vi se på definisjonene av ekstremalpunkt og vendepunkt til en funksjon og sammenlikne definisjonene med ulike egenskaper til funksjonen vi ser på.

8.5.1 Ekstremalpunkt

Vi begynner med å definere ekstremalpunkt.

Definisjon 8.5.1. *For en funksjon f er a et ekstremalpunkt dersom $f(a)$ er større enn (toppunkt) eller mindre enn (bunnpunkt) $f(x)$ for x i et omegn om a.*

Vi skal sammenlikne denne definisjonen med det at $f'(a) = 0$ og at $f'(x)$ skifter fortegn i a. Vi skriver opp de tre egenskapene vi skal sammenlikne.

- $f'(x)$ skifter fortegn i a
- a er et ekstremalpunkt
- $f'(a) = 0$

Vi skal sjekke hvilke implikasjoner vi har mellom disse egenskapene.

$f'(x)$ skifter fortegn i a $\implies$ a er et ekstremalpunkt

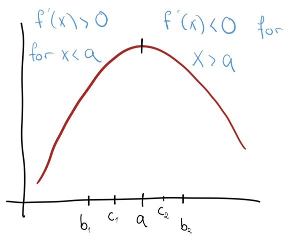
For å vise denne implikasjonen trenger vi middelverdisetningen fra kalkulus.

Teorem 8.5.1 (Middelverdisetningen)**.** *Hvis $f(x)$ er kontinuerlig på $[a, b]$ og deriverbar på (a, b) fins det en $c \in (a, b)$ slik at*

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

For å vise implikasjonen antar vi at $f'(x)$ skifter fortegn i a. Vi antar at fortegnet først er positivt og skifter til å bli negativt (det andre tilfellet vises på tilsvarende måte). Altså er $f'(x) > 0$ for $x < a$ og $f'(x) < 0$ for $x > a$ når x er i nærheten av a, se figur 8.5 Vi velger oss en c_1 i intervallet (b_1, a) og bruker middelverdisetningen på c_1.

$$f'(c_1) = \frac{f(b_1) - f(a)}{b_1 - a}$$



Figur 8.5: $f'(x)$ skifter fortegn i a.

1. Forklar hvorfor $f'(c_1) > 0$.
2. Hva kan du si om fortegnet til $(b_1 - a)$?
3. Foklar at $f(a) > f(x)$ for $x \in (b_1, a)$.
4. Vis på tilsvarende måte at $f(a) > f(x)$ for $x \in (a, b_2)$ og konkluder med at a er et ekstremalpunkt.

a er et ekstremalpunkt $\implies f'(a) = 0$

For å vise denne implikasjonen bruker vi definisjonen av den deriverte. Vi antar at a er et topppunkt, altså er $f(a) > f(x)$ for x i et omegn om a. Vi ser først på et punkter som er større enn a, for eksempel $a + h$, se figur 8.6.

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

unkt for

5. Hva kan du si om deriverte $f'(a)$ når du vet at a er et toppunkt?
6. Vi ser nå på punkter som ligger til venstre for a, for eksempel $a - h_1$, se figur 8.6. Forklar hvorfor den deriverte blir

$$f'(a) = \lim_{h_1 \to 0} \frac{f(a) - f(a - h_1)}{h_1}$$

7. Hva kan du si om deriverte $f'(a)$ når du vet at a er et toppunkt?
8. Forklar hvorfor $f'(a) = 0$.

$f'(a) = 0 \not\Longrightarrow$ a er et ekstremalpunkt

Siden vi skal vise at en påstand ikke impliserer en annen påstand, trenger vi bare å gi ett eksempel på at det ene ikke medfører det andre, altså et moteksempel. Vi må altså finne en funksjon som har et punkt a der $f'(a) = 0$, men der a ikke er et ekstremalpunkt.

9. Gi et eksempel på en funksjon der $f'(a) = 0$, men at a ikke er et ekstremalpunkt.
10. Hva kalles a i dette tilfellet?

a er et ekstremalpunkt $\not\Longrightarrow f'(x)$ skifter fortegn i a

På samme måte som over trenger vi bare å gi ett moteksempel. Vi må altså finne en funksjon som har et ekstremalpunkt i a, men at $f'(x)$ ikke skifter fortegn i a. For å finne dette, trenger vi å presisere hva det vil si at $f'(x)$ skifter fortegn i et punkt. Det vi mener med at $f'(x)$ skifter fortegn i et punkt er at du kan se på et omegn om a der $f'(x)$ for $x < a$ har ett fortegn og $f'(x)$ for $x > a$ har motsatt fortegn.

11. ♠ Forklar hvorfor $f(x) = x^2 + \frac{1}{2}x^2 \sin \frac{1}{x}$ er et eksempel på en slik funksjon.

12. Hva kan du si om sammenhengen mellom at $f'(x)$ skifter fortegn i a og at $f'(a) = 0$?

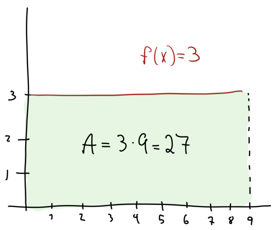
8.5.2 Vendepunkt

Vi begynner også denne seksjonen med en definisjon.

Definisjon 8.5.2. *La $f(x)$ være en kontinuerlig funksjon på (a, b) med $c \in (a, b)$ og anta at f er to ganger deriverbar bortsett fra muligens i c, men f har en tangent i c. Vi kaller c et vendepunkt dersom $f''(x)$ skifter fortegn i c.*

Vi skal nå sammenlikne denne definisjonen med tre egenskaper ved funksjonen. Det er at $f'(c)$ er et ekstremalpunkt, at $f''(c) = 0$ og at $f(x)$ har en kryssende vendetangent i c.Vi skal si hva det vil si å en kryssende vendetangent. Vi skriver opp alle egenskapene vi skal sammenlikne.

- $f''(x)$ skifter fortegn i c
- $f'(c)$ er et ekstremalpunkt
- $f''(c) = 0$
- $f(x)$ har en kryssende vendetangent i c



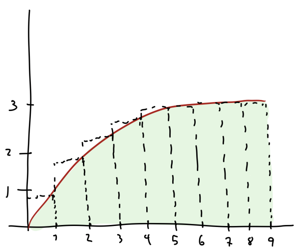
Figur 8.7: Arealet under grafen $f(x) = 3$ er enkelt å regne ut.

13. Forklar sammenhengen mellom de tre øverste egenskapene. Hint: sett $f'(x) = g(x)$ og sammenlikn med egenskapene ved ekstremalpunkt.

14. Sammenlikn de tre øverste egenskapene med den siste egenskapen.

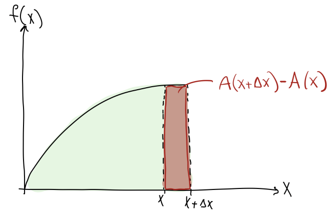
8.6 Analysens fundamentalteorem

I denne seksjonen skal vi se på hva anaylsens fundamendalteorem sier og gi et intuitivt bevis av teoremet. Analysens fundamentalteorem gir en metode for integrasjon, så før vi kan se på teoremet må vi se på hva integrasjon er. Integrasjon handler om å finne arealet under en graf. Hvis grafen vi skal finne arealet under er en rett strek, er det ingen sak, se figur 8.7. Det er verre når grafen er krum, se figur 8.8. Da kan vi dele opp området under grafen i rektangler og heller regne ut arealet av disse for å få et estimat av arealet. Skal vi imidlertid regne ut arealet helt presist vet vi imidlertid at vi kan bruke teknikken «antiderivasjon». Det er



Figur 8.8: Arealet under grafen må deles opp i rektangler.

analysens fundamentalteorem som sier at vi kan bruke antiderivasjon som en metode for å integrere. Vi skal se litt nærmere på denne sammenhengen mellom derivasjon og integrasjon.



Figur 8.9: Illustrasjon til bevis av analysens fundamentalteorem.

Teorem 8.6.1 (Analysens fundamentalteorem)**.** *Anta f integrerbar. Da er*

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt = f(x).$$

1. ♠ Forklar hvorfor vi integrerer med hensyn på t og ikke x i Teorem 8.6.1.
2. Bruk Teorem 8.6.1 til å komme fram til den kjente regneregelen for integrasjon:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a),$$

der $F'(x) = f(x)$.

Vi skal nå se på et bevis for fundamentalteoremet.

Bevis. Vi skal bruke figur 8.9 til beviset. Vi ønsker å undersøke hvordan arealet under grafen endrer seg når Δx endrer seg. Det vi skal finne ut er altså

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta A(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{A(x+\Delta x)-A(x)}{\Delta x} \tag{8.5}$$

3. Bruk at $f(x) \approx f(x+\Delta x)$ når $\Delta x \to 0$ til å vise at Likning (8.5) er lik $f(x)$.

∎