UiO : Universitetet i Oslo

Kul geometri - overflateareal og volum av kuler

Helmer Aslaksen

Institutt for lærerutdanning og skoleforskning/Matematisk institutt
Universitetet i Oslo

helmer.aslaksen@gmail.com
helmeraslaksen.com

Min bakgrunn

- Cand. mag fra UiO
- PhD fra University of California, Berkeley.
- 22 år ved Department of Mathematics, National University of Singapore.
- Visepresident for Singapore Mathematical Society.
- Chair of organizing committee for Singapore Math Olympiad.
- Introduserte to nye «General Education Modules»: «Heavenly Mathematics and Cultural Astronomy» og «Mathematics in Art and Architecture».
- Visepresident for Singapore Mathematical Society.
- Konsulent for lærebøker for Ministry of Education i Singapore.

Min bakgrunn 2

- Flyttet tilbake til Norge i 2011 for å ta en delt stilling ved Institutt for lærerutdanning og Matematisk institutt.
- Jeg har introdusert et nytt kurs ved UiO, MAT4010 Skolematematikk fra et avansert synspunkt.
- Jeg driver med noe imellom matematikk og matematikkdidaktikk. Jeg kaller det didaktisk matematikk.

Hvorfor vil jeg snakke om volumet av kulen?

- Det gjøres dårlig på skolen og i lærerutdanningen.
- Det kreves dyp matematikkforståelse for å bidra til dybdelæring.
- Intuisjon og motivasjon er viktig for dyp forståelse.
- Flerkulturell integrasjon.

Kvadrat

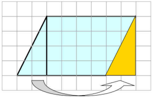
- Hva kaller vi en firkant med like lange sider?
- Rombe, ikke kvadrat!
- Hva kaller vi en firkant med like store vinkler?
- Rektangel, kommer fra rectangulus, som betyr rett vinkel, siden de fire vinklene alle er rette.
- Er et kvadrat et rektangel?
- I matematikk bruker vi vanligvis inkluderende definisjoner. Et naturlig tall er et heltall, et rasjonalt tall, reelt tall og et komplekst tall.
- Noen ganger er vi litt uklare. Vi sier ofte kompleks når vi egentlig mener ikke-reel. «Ligningen har komplekse røtter.»

Regulære n-kanter

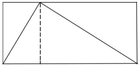
- En mangekant kalles regulær hvis den har like lange sider og like store vinkler.
- For trekanter er de to betingelsene ekvivalente.

Areal av trekanter

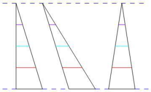
- Vi tar formelen for arealet av et rektangel for gitt.
- Gitt et parallellogram, kan vi konstruere et rektangel med samme areal.



- Vi putter en trekant inn i et rektangel med dobbelt så stort areal.



- Arealet av en trekant avhenger bare av grunnlinjen og høyden, ikke av formen.



Omkretsen til en sirkel

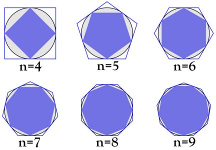
- Det er lett å finne omkretsen til polygoner, men hvordan kan vi finne omkretsen til en krum kurve?
- Vi tilnærmer kurven med polygoner, og tar en grense!
- For å finne omkretsen til en sirkel konstruerer vi en følge, P_n, av polygoner innskrevet i sirkelen, og en følge, Q_n, av polygoner som omskriver sirkelen slik at $P(P_n)$, omkretsen til P_n, er voksende og $P(Q_n)$ er avtagende.
- Vi kan vise at vi kan velge P_n og Q_n slik at $\lim\limits_{n\to\infty}(P(Q_n) - P(P_n)) = 0$, det vil si at begge følgene konvergere mot en felles grense som vi definerer som omkretsen til sirkelen.

Definisjonene av π

- Vi definerer π som omkretsen delt på diameteren i en sirkel.
- X-rated: Her gjør vi et valg av en sirkel. Hvordan vet vi at π er «veldefinert», det vil si at verdien av π ikke avhenger av valget av sirkelen?
- Se på to sirkler, C og C', og velg polygonfølgene, P_n og P'_n slik at polygonene i P_n og P'_n består av trekanter som er formlike, det vil si at polygonene har somme form, bare forskjellig størrelse. Det følger da fra formlikheten at forholdet mellom omkrets og diameter er det samme for polygonfølgene, og derfor også for sirklene.

Verdien av π

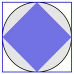
- Start med en sirkel med radius 1 og se på innskrevne og omskrevne firkanter. Vi bruker Pytagoras og ser at $4\sqrt{2} <$ omkretsen < 8.



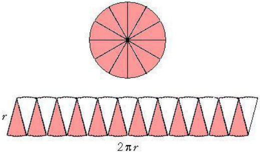
- Vi deler så på diameteren som er 2, og får at $2\sqrt{2} < \pi < 4$.
- Ved å se på en innskreven 6-kant og bruke likesidete trekanter får vi at $\pi > 6/2 = 3$.
- Ved å se på 96-kanter, viste Arkimedes at $223/71 < \pi < 22/7$ eller $3{,}1408 < \pi < 3{,}1429$.

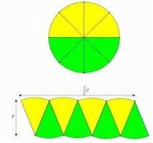
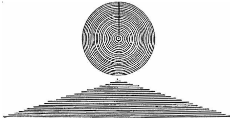
Areal av sirkelen

- Det er lett å se at arealet av sirkelen er mellom $(\sqrt{2}r)^2 = 2r^2$ og $(2r)^2 = 4r^2$.

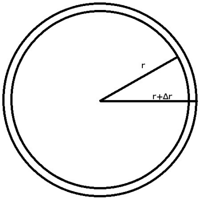


- Vi bruker så «Pizzametoden» og får at $2\pi r \cdot r/2 = \pi r^2$.



-  

Den deriverte av arealet er omkretsen

- 

  La $A(r)$ være arealet av sirkelen med radius r. Vi vil se på

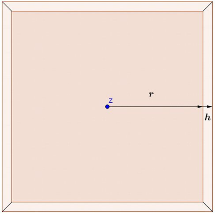
$$\frac{A(r+\Delta r)-A(r)}{\Delta r}.$$

- Vi kan brette ut «ringen» og få et «rektangel», slik at $A(r+\Delta r)-A(r)\approx P(r)\Delta r$, hvor $P(r)$ er omkretsen. Da er

$$\lim_{\Delta r\to 0}\frac{A(r+\Delta r)-A(r)}{\Delta r}\approx\lim_{\Delta r\to 0}\frac{P(r)\Delta r}{\Delta r}=P(r).$$

Hva med kvadratet?

- La $K(s)$ være kvadratet med side s. Da er $A(K(s)) = s^2$, $P(K(s)) = 4s$, og vi ser at omkretsen ikke er den deriverte av arealet hvis variabelen er lengden av siden.
- Hvis vi øker s med h får «ringen» tykkelse $h/2$.



- Sett i stedet $r = s/2$. Da blir $A(r) = (2r)^2 = 4r^2$ og $P(r) = 4(2r) = 8r$, og vi ser at omkretsen er den deriverte av arealet hvis variabelen er avstanden fra sentrum til sidene i kvadratet.

Areal og omkrets av sirkelen

- Vi trenger ikke å bevise begge formlene $P(r) = 2\pi r$ og $A(r) = \pi r^2$.
- Den ene brukes til å definere π. Enten som forholdet mellom omkrets og diameter, eller som arealet av enhetssirkelen.

Volum er vanskeligere enn areal

- Carl Friedrich Gauss (1777-—1855) påpekte at for å utlede formelen $gh/3$ for en vilkårlig pyramide, må man bruke et grenseargument.
- Dette henger sammen med Hilberts tredje problem. To polygoner med samme areal kan klippes og limes slik at de blir like. Men Max Dehn viste i 1901 at det finne polyedre med samme volum som ikke er «saksekongruent». Dette illustrerer at volum er et mer komplisert begrep.

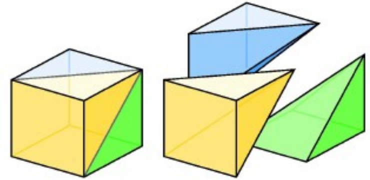
Cavalieris prinsipp

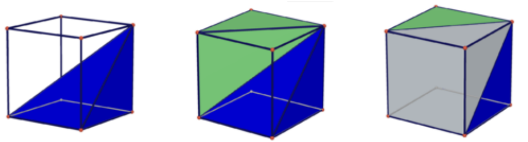
- Bonaventura Francesco Cavalieri (1598—1647) formulerte i 1635 en metode som tidligere også var blitt brukt av Arkimedes (ca. 287 f.Kr. — ca. 212 f.Kr.) og Zǔ Gèngzhī 祖暅之, (ca. 450 – ca. 520).
- Anta at to figurer i rommet ligger mellom to parallelle plan, og at alle plan som er parallelle med disse to skjærer figurene i tverrsnitt av samme areal. Da har de to figurene samme volum.

- Anta at du har to bygninger som er like høye, og hvor hver etasje har samme areal. Da har de samme volum.
- Men bemerk at de ikke nødvendigvis vil ha samme overflateareal. En skjev bygning vil ha større overflateareal.

Volum av pyramider 1

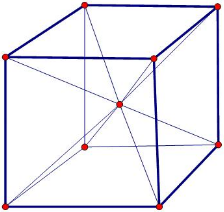
- Volumet av en kvadratisk pyramide med toppunkt over et hjørne og med høyde og side lik 1 er $1/3$.



- 

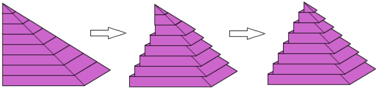
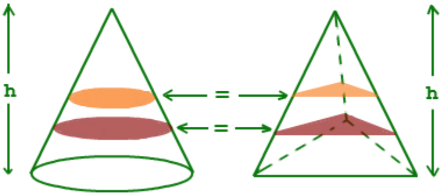
Volum av pyramider 2

- Volumet av en kvadratisk pyramide med toppunkt over et hjørne og høyde $1/2$ og side 1 er $1/6$.



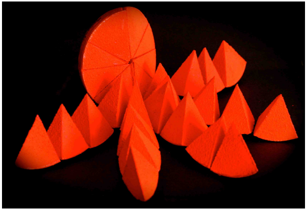
- Dette kan brukes som motivasjon for den generelle formelen $V = gh/3$, hvor g er arealet av grunnflaten og h er høyden i pyramiden.
- Faktoren 1/3 er ikke tilfeldig. Volumet av en n-dimensjonal pyramide er gh/n.
- Hva er en 2-dimensjonal pyramide?

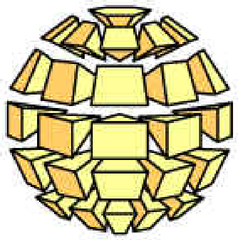
Volum av pyramider 3

- Vi har nå sett to eksempler på pyramider med volum gitt ved formelen $V = gh/3$, men holder formelen for alle pyramider?
- Vi kan nå bruke Cavalieris prinsipp til å konkludere at formelen $V = gh/3$ holder for alle pyramider og kjegler.
- 
- 

Overflateareal og volum av kuler 1

- Vi skriver $V(r)$ for volumet av kulen med radius r og $A(r)$ for overflatearealet.
- Anta at vi kutter kulen opp i «pyramider» som vi bretter ut. Vi får da at volumet av kulen er summen av volumet av «pyramidene», men det er tilnærmet $A(r)r/3$.





Overflateareal og volum av kuler 2

- Jeg kaller dette «Mangometoden».

- Formelen $V(r) = A(r)r/3$ viser at vi bare trenger å bevise en av formlene

$$V(r) = \frac{4}{3}\pi r^3,$$
$$A(r) = 4\pi r^2.$$

Overflateareal og volum av kuler 3

- På tilsvarende måte som for sirkelen kan vi vise at hvis $V(r)$ er volumet av kulen med radius r og $A(r)$ overflaten, så er $V'(r) = A(r)$.
- $V(r+\Delta r) - V(r)$ er tilnærmet lik $A(r)\Delta r$. Vi får derfor

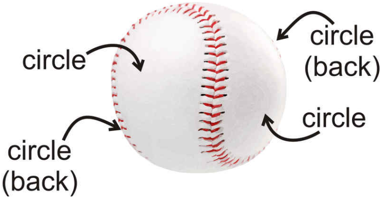
$$\lim_{\Delta r \to 0} \frac{V(r+\Delta r) - V(r)}{\Delta r} \approx \lim_{\Delta r \to 0} \frac{A(r)\Delta r}{\Delta r} = A(r).$$

- Dette viser igjen at vi bare trenger å bevise en av formlene

$$V(r) = \frac{4}{3}\pi r^3,$$
$$A(r) = 4\pi r^2.$$

Overflateareal og volum av kuler 4

- Før jeg beviser formlene, vil jeg motivere dem. En måte å motivere formelen $A(r) = 4\pi r^2$ på, er å se på en baseball



eller en tennisball.

Overflateareal og volum av kuler 5

- Anta at du har et halvkuleformet telt. Arealet av gulvet er πr^2. Hvor mye større er arealet av taket?
- Jeg føler at det er et mirakel at arealet av taket i en halvkule er nøyaktig dobbelt så stort som arealet av gulvet.
- Anta at halvkuleteltet er omskrevet at et sylindertelt. Da er arealet av sylinderteltet

$$\pi r^2 + 2\pi r \cdot r = 3\pi r^2.$$

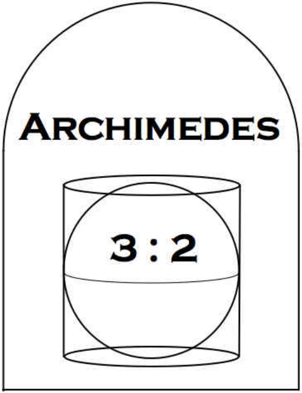
- Så arealet av gulv, halvkuletak og sylindertak er henholdsvis πr^2, $2\pi r^2$ og $3\pi r^2$.

Overflateareal og volum av kuler 6

- Anta at du putter en kjegleformet lavvo inne i det halvkuleformete teltet ditt. Lavvoen har volum $\pi r^3/3$.
- Sylinderteltet som omskriver halvkuleteltet har volum πr^3.
- Hadde det ikke vært fint om volumet av halvkuleteltet var midt mellom disse, nemlig $2\pi r^3/3$?
- Så volumet av lavvo, halvkule og sylinder er henholdsvis $1\pi r^3/3$, $2\pi r^3/3$ og $3\pi r^3/3 = \pi r^3$.

Arkimedes' gravsten

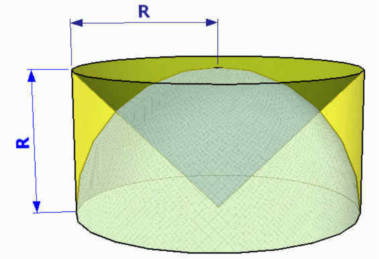
- Arkimedes (287 f.Kr. - 212 f.Kr.) ønsket denne figuren på sin gravsten.



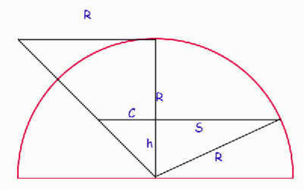
- Forholdet mellom arealet og volumet av sylinderen og kulen er det samme. $6\pi r^2/4\pi r^2 = 3/2$ og $2\pi r^3/(4/3)\pi r^3 = 3/2$.

Bevis for volumformelen

- Vi vil bruke Cavalieris prinsipp. Putt en kjegle opp ned inne i en halvkule.



Bevis for volumformelen 2

- 

- Vi vil vise at for hver høyde, er arealet av snittet mellom planet i høyde h og sylinderen lik summen av arealet av snittene mellom planet og halvkulen og kjeglen.
- Hvis vi snitter i høyde h, får vi areal

$$\pi S^2 = \pi(R^2 - h^2)$$

for kulen og

$$\pi C^2 = \pi h^2$$

for kjeglen. Men siden $S^2 + C^2 = R^2$, blir summen av disse to arealene πR^2, som er arealet av snittet med sylinderen.

Bevis for volumformelen 3

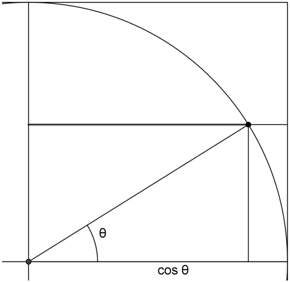
- Det følger nå fra Cavalieris prinsipp at summen av volumet av halvkulen og volumet av kjeglen er volumet av sylinderen, så volumet av halvkulen blir

$$\pi r^3 - \pi r^3/3 = 2\pi r^3/3.$$

Bevis for arealformelen 1

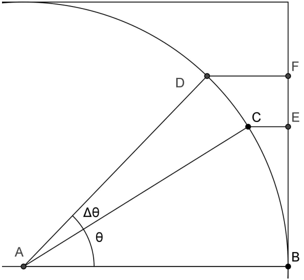
- Vi vil vise at projeksjonen fra kulen ut til veggen av den omskrevne sylinderen er arealbevarende. Siden arealet av sylinderveggen er $2\pi r \cdot 2r$ får vi $A(r) = 4\pi r^2$.
- Vi vil se på hvordan projeksjonen strekker horisontalt og vertikalt. Vi vil se på enhetssirkelen for å gjøre argumentet enklere.

Bevis for arealformelen 2

- 

- Breddesirkelen med breddegrad θ har lengde $2\pi \cos \theta$, og blir avbildet på en sirkel på sylinderen med lengde 2π, så horisontalt strekkes lengder med en faktor på $1/cos\theta$.

Bevis for arealformelen 3

- Vi vil nå sammenligne vertikale avstander på sylinderen og kulen.
- 

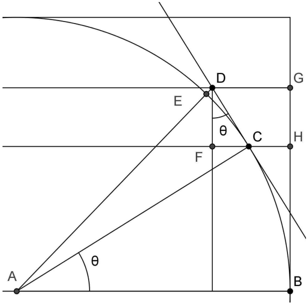
- På sylinderen blir avstanden $FE = FB - EB = \sin(\theta + \Delta\theta) - \sin\theta$, og på kulen er avstanden $DC = \Delta\theta$. Det følger at den vertikale strekningsfaktoren blir

$$\lim_{\Delta\theta \to 0} \frac{\sin(\theta + \Delta\theta) - \sin\theta}{\Delta\theta} = \cos\theta.$$

Bevis for arealformelen 4

- Siden produktet av den vertikale og den horisontale strekningsfaktoren er $\cos\theta \cdot 1/\cos\theta = 1$, følger det at projeksjonen er arealbevarende.
- Merk at langs breddesirkelen er den horisontale strekningsfaktoren konstant, men langs meridianen varier den vertikale strekningsfaktoren, så det vi har regnet ut er den momentane vertikale strekningsfaktoren. Det er derfor vi trengte å ta en grenseverdi.

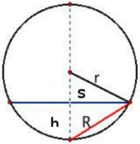
Bevis for arealformelen 5

- 

- Vi kan også bestemme den vertikale strekningsfaktoren ved å måle langs tangenten i stedet for å måle langs kulen. Siden vinklene $\angle CDF$ og $\angle CAB$ har parvise vinkelrette ben, er de like, og da blir den vertikale strekningsfaktoren $\mathrm{GH}/\mathrm{DC} = \mathrm{DF}/\mathrm{DC} = \cos\theta$.

Overflateareal av kulekalott

- En kulekalott med høyde h og avstand fra pol til rand R har ifølge Arkimedes areal $2\pi rh$. Vi skal nå vise at dette også kan skrives som πR^2.



- La s være radiusen til randen til kalotten. Da er

$$
\begin{aligned}
(r-h)^2 + s^2 &= r^2, \\
h^2 + s^2 &= 2rh, \\
R^2 = h^2 + s^2 &= 2rh.
\end{aligned}
$$

Overflateareal av kulekalott 2

- Hvis vi setter $h = r$ eller $h = 2r$, får vi formlene for areal av halvkule og kule.
- Hvis vi ser på kjeglen inne i kulekalotten, så er arealet av mantelflaten til kjeglen

$$\pi R^2 \frac{2\pi s}{2\pi R} = \pi R s,$$

som vi ser er mindre enn πR^2.