Differensiallikninger

Mellomprosjekt MAT4010

Tiina K. Kristianslund, Julian F. Rossnes
og Torstein Hermansen

6. mai 2014

Innhold

1 Innledning

Differensiallikninger ligger i læreplanen for matematikk R2, det vil si matematikk i tredje klasse på videregående for de elevene som har valgt realfaglig matematikk. Læreplanmålene sier at eleven skal kunne

- *modellere praktiske situasjoner ved å omforme problemstillingen til en differensiallikning, løse den og tolke resultatet*
- *løse lineære første ordens og separable differensiallikninger ved regning og gjøre rede for noen viktige bruksområder*
- *løse andre ordens homogene differensiallikninger og bruke Newtons andre lov til å beskrive frie svingninger ved periodiske funksjoner*
- *løse differensiallikninger og tegne retningsdiagrammer og integralkurver, og tolke dem ved å bruke digitale hjelpemidler*

I denne oppgaven vil vi kort presentere noe av teorien fra læreplanen, med visse utdypinger. Videre vil vi gi en presentasjon av hvordan de ulike læreverkene velger å dekke disse læreplanmålene.

2 Differensiallikninger

2.1 Førsteordens, lineære differensiallikninger

Førsteordens, lineære differensiallikninger er likninger på formen

$$y'(x) + f(x)y(x) = g(x)$$

For å løse en slik likning, og dermed finne ut hva funksjonen $y(x)$ er, er man nødt til å bruke det som kalles en integrerende faktor, en faktor som gjør at vi kan integrere uttrykket uten å skape problemer for oss. Akkurat som metoden for å løse andregradslikninger ved hjelp av å danne et fullstendig kvadrat, handler det her om å bli kvitt førstegradsleddet, slik at vi kan integrere $y'(x)$. Multipliserer man hele likningen med $e^{F(x)}$, der $F(x)$ er en antiderivert til $f(x)$, får vi

$$e^{F(x)}y'(x) + e^{F(x)}f(x)y(x) = e^{F(x)}g(x)$$

og vi ser at vi nå kan bruke produktregelen for derivasjon baklengs på likningens venstreside. Integrerer vi etter å ha gjort dette får vi

$$e^{F(x)}y(x) + C = \int e^{F(x)}g(x)\,dx$$

og etter litt opprydding får vi at løsningen på en førsteordens, lineær differensiallikning er på formen

$$y(x) = e^{-F(x)} \left(\int e^{F(x)} g(x)\, dx + C \right)$$

I en oppgave eller praktisk problem vil man ofte ha gitte initialbetingelser, også kalt randkrav, som gjør at man kan bestemme konstanten C.

2.2 Separable differensiallikninger

Separable differensiallikninger er definert som likninger på formen $h(y)y' = g(x)$. Navnet separable kommer fra at vi ser at x-ene og y-ene er separert av likhetstegnet. For å løse en separabel differensiallikning ser vi at hvis vi integrerer begge sider med hensyn på x får vi

$$\int h(y)y'\, dx = \int g(x)\, dx$$

$$\int h(y)\, dy = \int g(x)\, dx$$

Nå kan vi integrere funksjonene våre og finne et uttrykk for y, og differensiallikningen er løst. Det som kanskje er det mest interessante ved å løse separable differensiallikninger er overgangen fra den første til den andre likningen. Vi har fra kjerneregelen at $dy(x, \Delta x) = y'(x) \cdot \Delta x$ og $dx(x, \Delta x) = x' \cdot \Delta x = \Delta x$. Deler vi den første likningen på den andre får vi $\frac{dy}{dx} = y'(x)$.

2.3 Annenordens, homogene differensiallikninger med konstante koeffisienter

En andreordens homogen differensiallikning med konstantekoeffisienter er en differensiallikning på formen:

$$f''(x) + bf'(x) + cf(x) = 0$$

Vi ser for oss at denne skal løses ved å integrere to ganger, noe som vil føre til en løsningskurve som består av to ledd. Integrasjonskonstantene blir en del av disse leddene.

Også for andreordens diff.likninger antar vi at eksponentialfunksjonen gir oss løsningen, fordi eksponentialfunksjonen har den egenskapen at den er lik sin egen derivert, eventuelt multiplisert med en konstant: $(e^{kx})' = ke^{kx}$. Dette gir oss en løsning på formen $y(x) = e^{rx}$. Da har vi $y'(x) = re^{rx}$ og $y''(x) = r^2e^{rx}$. Dersom vi setter dette inn i den originale likningen, får vi

$$r^2e^{rx} + bre^{rx} + ce^{rx} = 0$$

$$e^{rx}(r^2 + br + c) = 0$$

For at dette skal gjelde, må

$$r^2 + br + c = 0$$

Dette kaller vi den karakteristiske likningen til differensiallikningen og vi bruker denne til å løse likningen. Når vi løser den karakteristiske likningen kan vi få enten to reelle røtter, en reell rot eller to komplekse røtter. Vi vil nå gå gjennom disse tilfellene separat.

2.3.1 To reelle røtter, r_1 og r_2:

I dette tilfellet blir løsningen på differensiallikningen gitt ved

$$y(x) = Ce^{r_1 x} + De^{r_2 x}$$

hvor C og D er konstanter.

2.3.2 Én reell rot, r:

Dersom vi får én reell rot fra den karakteristiske likningen, ville vi kanskje forvente en løsningskurve på formen $y(x) = Ce^{rx}$. Fordi vi integrerer to ganger i en 2. ordens differensiallikning, trenger vi to lineært uavhengige løsninger i løsningsformelen. Vi prøver oss frem og finner at Dxe^{rx} også er en løsning på differensiallikningen når vi har tilfellet med en reell rot. Den generelle løsningsformelen for en 2. ordens homogen differensiallikning med konstante koeffisienter, hvor den karakteristiske likningen gir én reell rot, blir dermed

$$y(x) = Ce^{rx} + Dxe^{rx}$$

2.3.3 To komplekse røtter, r_1 og r_2

Dersom vi får et negativt ledd under rottegnet når vi løser den karakteristiske likningen, får vi komplese tall som løsning. Disse vil være komplekskonjugerte av hverandre:$r_1 = \overline{r_2}$. Vi forventer en løsningsformel som inneholder to linerært uavhengige ledd på eksponentialform:

$$y(x) = Ce^{r_1 x} + De^{r_2 x}$$

Vi evaluerer de to løsningene med komplekse røtter separat og summerer for å finne den generelle løsningsformelen:

$$e^{r_1 x} = e^{(a+ib)x} = e^{ax}(cos(bx) + isin(bx))$$
$$e^{r_2 x} = e^{(a-ib)x} = e^{ax}(cos(bx) - isin(bx))$$

Disse er komplekskonjugerte av hverandre.
Vi ønsker oss en reell løsning, altså en løsning uten imaginærdel, og gjør

derfor et triks i valg av konstanter. Ved å velge disse komplekskonjugerte av hverandre, vil imaginærleddene falle bort når vi summerer de to funksjonene. Vi setter $C = A + iB$ og $D = A - iB$. Dette gir oss:

$$y(x) = Ce^{r_1 x} + De^{r_2 x}$$
$$y(x) = (A + iB)e^{r_1 x} + (A - iB)e^{r_2 x}$$
$$y(x) = (A + iB)e^{ax}(cos(bx) + isin(bx)) + (A - iB)e^{ax}(cos(bx) - isin(bx))$$
$$y(x) = 2Ae^{ax}cos(bx) - 2Be^{ax}sin(bx)$$
$$y(x) = Ce^{ax}cos(bx) + De^{ax}sin(bx)$$
$$y(x) = e^{ax}(Ccos(bx) + Dsin(bx))$$

Dermed har vi den generelle løsningskurven for en 2.ordens homogen differensiallikning med konstante koeffisienter med to komplekse røtter, r_1 og r_2:

$$y(x) = e^{ax}(Ccos(bx) + Dsin(bx))$$

3 Behandling av differensiallikninger i læreverk for matematikk R2

3.1 Sinus R2

Sinus R2 behandler differensiallikninger i bokens site kapittel, delt opp i åtte delemner. Forfatterne starter med et par eksempler på differensiallikninger, $2y' - 6y = 2x$ og $xy'' + 2y' - x^2y = e^x$, og bruker disse for å introdusere en del terminologi som ordenstall, konstante koeffisienter og (in)homogen. Videre viser de med et eksempel hvordan man kan løse førsteordens, homogene, lineære differensiallikninger med konstante koeffisienter. Etter eksempelet skriver de at når man skal løse en slik likningen må man først ordne den på formen $y' + ay = h(x)$, for siden å multiplisere begge sider med e^{ax} og integrere. Forfatterne velger her altså å ikke skrive opp en generell løsningsformel, men fokuserer på selve fremgangsmåten. Etter et eksempel som viser hvordan man bruker randkrav for å finne en bestemt løsning av differensiallikningen går boken videre til inhomogene likninger. Bokens andre delemne tar for seg praktisk bruk av slike likninger, før de i tredje delemne introduserer separable differensiallikninger.

Det er i dette delemnet elevene først møter differensiallikninger der koeffisientene ikke er konstante, og når dette dukker opp er det som separable likninger. Igjen viser forfatterne framgangsmåten for å løse slike likninger via et eksempel, men det gjør det nokså grundig. Det man kan undre seg over er at forfatterne bruker en del plass på å vise variabelskiftet som finner sted, men uten å forklare eller peke på hvorfor man gjør det. Videre generaliserer de ting litt ved å skrive opp den generelle formen $g(y)y' = f(x)$

og vise hvordan løsningsmetoden for separable likninger også fører frem for likninger med konstante koeffisienter. Neste delkapittel er viet anvendelser av separable differensiallikninger, logistisk vekst. Her viser de også hvordan man kan finne den logistiske veksten som passer best til et datasett ved hjelp av kalulator. Da det er noen år siden denne boken ble skrevet og utgitt virker dette noe utdatert, i dag ville man nok heller ha brukt annen programvare, for eksempel Geogebra.

Det femte delkapittelet tar for seg retningsdiagrammer for førsteordens differensiallikninger. Her viser de, igjen ved hjelp av et eksempel, hvordan man må finne et uttrykk for den deriverte, slik at man kan finne stigningstallet til den deriverte i et gitt punkt. De viser også et bilde av hvordan man kan gjøre dette digitalt, men viser her videre til bokens nettside. Dette delkapittelet virker ganske kort, med tanke på at å tegne og tolke rettningsdiagrammer med digitale verktøy er et eget læreplanmål.

Det er først i det sjette delkapittelet at forfatterne velger å forklare uten bruk av et bestemt eksempel. Temaet er lineære annenordens homogene differensiallikninger med konstante koeffisienter, og vi skulle gjerne likt å høre en forklaring fra forfatterne på hvorfor de velger å grundig teoretisk til verks først her. De starter med likningen $ay' + by = 0$ og viser til de tidligere delkapitlene for å si at løsningen er på formen $y = Ce^{rx}$. Videre viser de hvordan dette fører til den karakteristiske likningen, og bruker dette for å få løsningen $y = Ce^{-\frac{b}{a}x}$. Etter dette introduserer de likningen $ay'' + by' + cy = 0$, og viser hvordan man kommer fram til den karakteristiske likningen. Slutten av forklaringen virker litt forhastet, da de sier at likningens løsninger $y = e^{r_1 x}$ og $y = e^{r_2 x}$ er lineært uavhengige, og at man da kan vise at alle løsninger av likningen kan skrives som $y = Ce^{r_1 x} + De^{r_2 x}$, hvis den karakteristiske likningen har to løsninger.

Etter et eksempel går forfatterne videre til å vise hva som skjer når den karakteristiske likningen bare har én løsning. Her velger de å gå tilbake til metoden å forklare via et eksempel, men igjen er det noe av teorien som de kommenterer på en slik måte at ting blir hengende litt i luften. De skriver at i en annenordens differensiallikning trenger man to lineært uavhengige løsninger for å finne den generelle løsningen, før de viser at $y = xe^{r_1 x}$ også er en løsning. Når forfatterne skriver om hva som skjer når den karakteristiske likningen ikke har reelle løsninger gjør de dette på en grei måte. De viser ganske enkelt med et eksempel hvordan man er nødt til å finne andre funksjoner som passer inn i likningen, og skriver at man kan vise hvordan man kommer frem til løsningsformelen. De skriver også at det finnes en annen fremstilling av dette på bokens nettsider, for elever som har lært om komplekse tall.

De to siste delkapitlene er viet udempede og dempede svingninger, praktisk bruk av annenordens differensiallikninger. Her forklares og presenteres det en del fysikk, da dette er et valgfag som ikke alle elever nødvendigvis har.

Samlet sett opplever vi at Sinus R2 har en ryddig og enkel fremstilling av temaet differensiallikninger, men at det noen steder stikker ut litt av den mer kompliserte, underliggende teorien, uten at dette blir gått nærmere inn på. Boken holder det enkelt, og unngår spesialtilfeller og kuriositeter. Det er noe som nok gagner mange elever.

3.2 Sigma R2

Sigma har valgt å dele differensiallikninger i to ulike kapitler, et med førsteordens differensiallikninger og et med andreordens differensiallikninger. Mellom disse kapitlene har læreboken et kapittel om rekkeutvikling, det vil si at boken har lagt opp til at elevene skal lære differensiallikninger i to separate bolker. Dette skiller denne læreboken fra de to andre lærebøkene. Læreverket har en eksempelbasert tilnærming til stoffet og begynner begge kapitlene med å gi elevene løsninger som de skal vise at stemmer. De introduserer også alle regler med først å gjennomgå et ekesempel hvor de får bruk for det de senere oppsummerer som en løsningsformel. Vi regner med at tanken bak dette er at de ønsker at elevene skal utvikle en viss intuisjon.

1.ordens differensiallikninger

Dette kapittelet begynner med en presentasjon av hva en 1. ordens differensiallikning er og hva vi mener med løsningskurver. Læreboken har en enkel fremstilling av generell og spesiell løsning ved at de diskuterer overfladisk hvordan ulike initialbetingelser gir ulike verdier av konstanten C og dermed ulike løsningskurver.

Videre går læreboken over til å presentere 1. ordens differensiallikninger med konstante koeffisienter, dette er en likning på formen $y' + ay = b$. De utleder løsningsformelen for denne ved hjelp av å bruke integrerende faktor. Løsningsformelen er gitt ved $y = \frac{b}{a} + Ce^{-ax}$. Videre ser de på bruksområder for denne likningen, spesielt trekker de frem bruk av differensiallikninger i forbindelse med Newtons andre lov.

Læreboken går etter dette over til å løse lineære differensiallikninger av første orden: $y' + f(x)y = g(x)$. Disse løses ved hjelp av å bruke generell integrerende faktor $e^{\int f(x)\,dx}$. Boken utleder ikke denne, kanskje er dette fordi de hadde med en utledning når de fant løsningsformelen for konstante koeffisienter? Vi tenker at læreboken kanskje burde hatt med en utledning, også for den generelle løsningsformelen.

Separable differensiallikninger: $g(y)y' = f(x)$ løses ved å integrere hver side og bruke kjerneregelen baklengs. Igjen er tilnærmingen eksempelbasert; prinsippene presenteres gjennom et eksempel uten mye forklaring. Som diskutert i timen, er det spesielt interessant å se på hvordan lærebøkene håndterer variabelskiftet som skjer i det vi setter $y' = \frac{dy}{dx}$. I sigma behandler de dette differensialet som en brøk uten å reflektere noe videre over det. Påfølgende delkapitelene tar for seg praktisk bruk av separable differensiallikninger.

Som avslutning til kapittelet kommer et delkapittel med retningsdiagrammer og numeriske løsninger. Det står presisert i læreplanen at elevene skal bruke digitale hjelpemidler til å tolke slike retningsdiagrammer, se innledning. Boken presenterer greit hva vi mener med et retningsdiagram og hvordan vi får disse. De tar derimot ikke med noe eksempel på eller oppskrift for hvordan man kan bruke digitale hjelpemidler til å tolke disse. Vi synes dette er et merkelig valg, når dette står spesifisert i læreplanen.

2. ordens differensiallikninger

For 2. ordens differensiallikninger velger læreboken igjen en eksempelbasert tilnærming. Ulikt de andre lærebøkene velger Sigma å ikke gå rett til å løse slike likninger ved hjelp av karakteristisk likning direkte. Sigma velger i stedet å først se på 2. ordens differensiallikninger som mangler enten y- eller y'-leddet. Disse kan løses uten å bruke karakterisitisk likning. Likningen $y''+f(x)y' = g(x)$ løses ved å redusere ordenen ved å sette $y' = z$ og løse som en førsteordens likning. For likninger som mangler y'-leddet velger boken å se på de to tilfellene $y'' = k^2y$ og $y'' = -k^2y$ hver for seg. Læreboken løser disse likningene ved å bruke spesiell løsning, det vil si at de setter $y = u \cdot y_0$ hvor y_0 er en kjent løsning på differensiallikningen. Boken utleder faktisk en løsningsformel for begge disse likningene, spesielt for likningen $y'' = -k^2y$ er denne utledningen ganske tøff. I forbindelse med disse eksemplene bruker læreboken et delkapittel til å se på et praktisk eksempel: frie svingninger uten dempning.

Videre tar læreboken en relativt rask gjennomgang av løsning av homogene 2. ordens differensiallikninger med konstante koeffisienter, $y''+by'+cy = 0$, ved hjelp av karakteristisk likning. De har med utledning av den karakteristiske likningen, men presenterer løsningsformlene for de ulike alternativene av røtter uten forklaringer. Når man løser den karakteristiske løsningen kan man ende opp med komplese løsninger. Elvene i R2 har imidlertid ikke vært borte i komplekse tall tidligere. Sigma løser dette problemet ved å gi elevene en sniktitt på hva komplekse tall er og ved å henvise til et annet kurs (matematikk x) for videre forklaringer. Neste delkapittel tar for seg frie svingninger med dempning, det vil si praktisk bruk av de likningene som de nettopp har gjennomgått.

Ut fra læreplanen er det ikke entydig om elevene skal kunne løse generelle homogene andreordens differensiallikninger eller om de kun skal kunne løse slike likninger med konstante koeffisienter. Sigma er det eneste av de tre læreverkene som velger å ta med løsning av en andreordens differensiallikning som har lineære konstanter. Dette må løses ved å bruke en kjent, spesiell løsning. Sigma løser en slik likning for elevene.

Oppsummering Vi synes alt i alt at Sigma har en helt grei fremstilling av differensiallikninger, med en greit fungerende veksling mellom regler og praktiske eksempler. Likevel synes vi gjennomgående at det er for lite forklaringer og at “essensen” fort kan drukne litt i alle eksemplene og spesialtilfellene. Spesielt tydelig synes vi at dette er i kapittelet om andreordens likninger. Vi mener at det ikke kommer tydelig nok frem for elevene at løsning ved hjelp av karakteristisk likning alltid vil føre frem, også når vi har likninger uten $y-$ eller y'-ledd. Dette kan kanskje føre til at de elevene som ikke selv klarer å se dette ender med å måtte pugge løsningsformlene for disse spesialtilfellene. At læreboken velger å utlede løsningsformelen for $y'' = -k^2y$, men ikke forklarere løsningene for likningen $y''+by'+cy = 0$, synes vi også er rart, spesielt når den utledningen de velger å ha med er såpass vanskelig. En klar mangel i Sigmas fremstilling er, som vi har vært inne på tidligere, at de ikke viser hvorodan man kan tolke retningsdiagrammer ved hjelp av digitale hjelpemidler. Fordi dette er et definert læreplanmål, vil de lærerene som følger dette læreverket måtte dekke dette ved hjelp av andre kilder.

3.3 Matematikk R2

I læreverket fra Aschehoug er det sjette og siste kapittelet *Differensiallikninger*. De har delt kapittelet inn i 7 delkapitler. *En ny type likning, Integralkurver og initialbetingelser, Separable differensiallikninger, Integrerende faktor, Praktisk bruk av differensiallikninger, Differensiallikninger av andre orden* og *Flere teknikker* er underoverskriftene.

Forfatterne starter med en å forklare hva en differensiallikning er; en likning med en funksjon som ukjent. Videre forklarer de hvordan man bestemmer hvilken orden en differensiallikning har, og de kommer med noen eksempler på løsningen til en differensiallikning. Der kommer de inn med begrepene spesiell løsning og generell løsning. De viser at en generell løsning har en kurveskare, men om vi er gitt en initialbetingelse får vi en integralkurve.

Separable differensiallikninger definerer de som likninger på formen

$$h(y)y' = g(x)$$

Først vil de at vi skal kunne gjøre om på ulike likninger for å se om de har den formen, for å sjekke om de er separable eller ikke. Når de separable differensiallikningene skal løses sier de at *i praksis behandler vi* $\frac{dy}{dx}$ *som en vanlig brøk*. Men kommer med en kommentar på slutten av delkapitlet at det blir det samme resultatet som om man integrerer begge siden med hensyn på x. Løsningen av en separabel differensiallikning finner man da ved å integrere på begge sider, og de viser et par eksempler.

Forfatterne definerer lineære differensiallikninger av første orden som likninger på formen

$$y' + f(x)y = g(x)$$

Igjen er vi gitt en likning, og de vil at vi skal påvise at den er lineær av første orden. Så forklarer de metoden for integrerende faktor. De viser at vi kan bruke produktregelen for derivasjon baklengs, og da igjen integrere på begge sider. Så sier de at den integrerende faktoren i alle tilfeller er $e^{F(x)}$, der $F(x)$ er en antiderivert til $f(x)$. De viser at dette fungerer gjennom 3 eksempler, før de kommer med beviset for integrerende faktor i slutten av delkapitlet.

Det femte delkapitlet er praktisk bruk av differensiallikninger. Her er det tre hovedoverskrifter. De er populasjonsvekst, fall i tyngdefeltet og reaksjonsfart. Her kommer de med ulike eksempler fra de ulike fagfeltene biologi, fysikk og kjemi, som for mange R2 elever mulig er kjent fra programfag de har hatt tidligere.

Så braker det løs med differensiallikninger av andre orden. De viser hvordan vi får den karakteristiske likningen, hvor

$$r^2 + br + c = 0$$

Så setter de opp de tre ulike tilfellene, to eller en reell løsning og to komplekse løsninger på den karakteristiske likningen, og har med den generelle løsningen til hvert av tilfellene. De forklarer at om $b^2 < 4c$ så får vi noe negativt under rottegnet, og at vi da får et komplekst tall, med en realdel og en imaginærdel. For mer om komplekse tall henviser de til nettsidene sine. Forfatterne skriver at vi trenger to initialbetingelser, og kommenterer at det kan vises at når man er gitt vekstfarten i ett punkt kan det vises at det differensiallikningen har akkurat en løsning. De bruker frie svigninger som hovedeksempel i delkapitlet.

Helt til slutt tar de med to andre teknikker for å løse differensiallikninger. De to metodene er å løse 2. og 3. grads likninger med y' som den ukjente, og å redusere ordenen til likningen ved å innføre en ny funksjon

$$Y = y'$$

Totalt sett synes vi fremstillingen av differensiallikninger er grei i Aschehougs læreverk. Forfatterne starter rolig med noen eksempler, og løser noen ved hjelp av digitale hjelpemidler og sjekker at løsningen er en løsning. Generelt har de mange eksempler, og kommer med bevis og utfyllende kommentarer på slutten av delkapitlene. De har med beviset for integrerende faktor og utleder den karakteristiske likningen. Newtons andre lov blir nøye gjennomgått, noe som er naturlig da dette er en del av et læreplanmål. Tegning av retningsdiagrammer blir henvist til nettstedet deres. De viser hvordan man kan lage slike, og viser et par eksempler. Vi synes det er positivt at de i et delkapittel legger opp til at elevene skal modellere praktiske situasjoner utfra differensiallikninger, og da ut med eksempler fra populasjonsvekst, fritt fall og reaksjonsfart. På andreordens differensiallikninger mener vi de sier passe mye om komplekse tall til at det ikke er del av noe læreplanmål. Elevene får vite hva det er, og hvor det kommer fra. Forfatterne henviser til nettstedet for elever som vil lære mer om komplekse tall.

4 Oppsummering

Av gjennomgangen av læreverkene ser vi at det er store likheter i fremstillingen av differensiallikninger. Det legges stor vekt på eksempler, og disse brukes for at elevene enklere skal forstå stoffet.

Forskjellene mellom bøkene er noen. Siden de er tre uavhengige grupper matematikere som tolker læreplanmålene og skal legge frem teori vil det naturlig nok bli forskjeller. Størst sprik oppfatter vi det er mellom Sigma R2 på den ene siden og Matematikk R2 og Sinus på den andre siden. Både Sinus og Aschehoug-boken beviser integrerende faktor og går rett på karakteristisk likning når det blir snakk om andregrads differensiallikninger. Sigma derimot fører ikke beviset for integrerende faktor, og tar en del spesialtilfeller av andregrads differensiallikninger før de kommer til karakteristisk likning.

Når det gjelder retningsdiagram og integralkurver er det lite lagt vekt på tolkning i alle tre læreverkene. Det blir vist hvordan vi får et retningsdiagram, og i Aschehoug-boken henviser de til nettstedet for en retningsdiagamstegner. Likevel blir det, slik vi ser det, ikke lagt opp til så mye tolkning rundt retningsdiagrammene.

5 Referanser

[1] Heir, O., Erstad, G., Moe, H. & Skrede, P.A. (2008) *Matematikk R2.* Oslo: Aschehoug

[2] Lindstrøm, T. (1995). *Kalkulus.* 3. utgave. Oslo: Universitetsforlaget.

[3] Oldervoll, T., Orskaug, O., Vaaje, A., Hanisch, F. & Hals, S. (2008) *Sinus R2.* Oslo: Cappelen Damm AS

[4] Sandvold, Øgrim, Bakken, Pettersen, Skrindo, Thorstensen & Thorstensen (2008). *Sigma R2.* Oslo: Gyldendal undervisning

[5] Utdanningsdirektoratet. *Læreplan i matematikk for realfag - programfag i studiespesialiserende utdanningsprogram - kompetansemål.* Hentet 10.04.2014 fra `http://www.udir.no/kl06/MAT3-01/Kompetansemaal/?arst=1858830314&kmsn=-1169861940`