Matematikk i astronomien

KULTURPROSJEKT MAT4010 - VÅR 2014

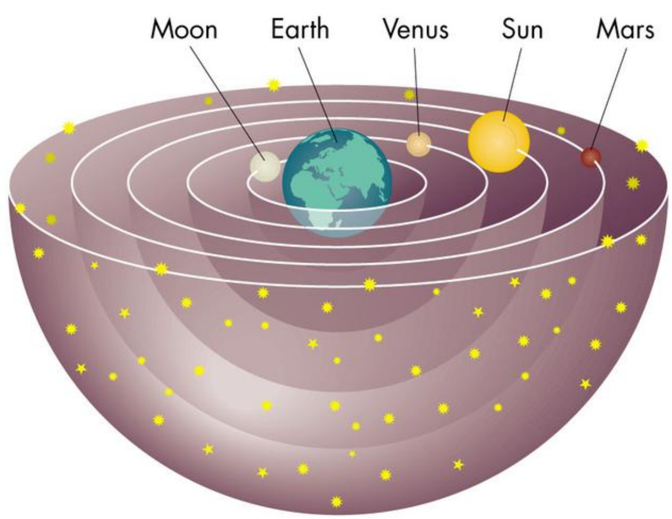
ASTRI STRAND LINDBÆCK
CAMILLA HELVIG
PIA LINDSTRØM

Date: 7. mai 2014.

1. Teorier om vårt solsystem

Det har vært utviklet svært mange teorier om jordas plass i universet, og om planetenes og stjernenes bevegelse. I antikkens Hellas var det en felles oppfatning av at himmellegemene bevegde seg i sirkelbaner med konstant hastighet, og at jorda befant seg i sentrum av disse banene (geosentrisk modell). Filosofen Platon (427 f.Kr.-347 f.Kr.) utfordret sine elever til å utvikle modeller som forklarte observasjonene de gjorde av planetbevegelsene. Én elev, Aristark, foreslo en teori med sola i sentrum av vårt solsystem (heliosentrisk modell), men overbevisningen om at jorden stod stille var så sterk at dette raskt ble avvist.

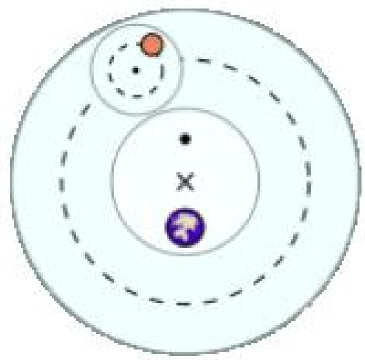
Aristoteles (384 f.Kr.-322 f.Kr.) var også elev av Platon. Han var overbevist om at himmellegemene bevegde seg på kuleskall med ulik radius. Jorda var i sentrum av disse kuleskallene, deretter fulgte hver planet og sola i hvert sitt kuleskall, og på det ytterste befant alle stjernene seg (se figur 1).



Figur 1. Geosentrisk modell med himmellegemene i faste kuleskall.
Kilde: http://www.ncwcom.com/ jones/Astronomy/astrochap2.htm

Denne modellen ville i følge Aristoteles forklare hvorfor “alt” faller mot jordas sentrum, og den beholdt overbevisningen om at jorda stod stille.

For å forklare den observerte bevegelsen av planetene godt nok, ble det innført *episykler* i banebeskrivelsene. Man så at planetene periodevis bevegde seg baklengs langs banen sin, og forklarte dette med at en planet beveger seg i en liten sirkelbane, en episykel, langs den store sirkelbanen rundt jorda.



Figur 2. En planet som beveger seg i episykler rundt jorda.

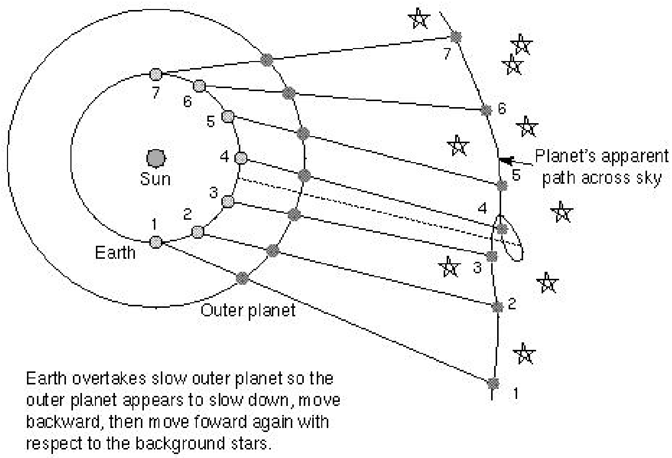
Noe senere utviklet den gresk-romerske astronomen Klaudios Ptolemaios (90-168) den til da mest nøyaktige modellen av planetenes bevegelse i solsystemet. For å forklare planetenes bane beholdt han episyklene, og for å forklare en observert variasjon i planetenes hastighet, flyttet han jorda litt unna banesentrumene (se figur 2). Denne modellen, det ptolemaiske system, ble akseptert og beholdt helt fram til det kopernikanske system ble introdusert på 1500-tallet.

Nikolaus Kopernikus (1473-1543) var en tysk-polsk astronom. Han ga i 1543 ut boken *Om himmelsirklenes omdreininger* der han lanserte en teori om et heliosentrisk verdensbilde og plasserte sola i sentrum av planetenes bevegelse. Kopernikus fant også ut av avstanden til planetene relativt til avstanden mellom jorda og sola.

Det er viktig å påpeke at både det ptolemaiske og det kopernikanske systemet var gode modeller som beskrev observasjonene i stor grad, og en overgang mellom de to systemene er mer komplisert enn et enkelt koordiantskifte. Å bruke episykler for å forklare planetenes bevegelser var heller ikke et dumt grep. Nøyaktigheten modellene hadde, gjorde at episyklene var godtatt i omtrent halvannet årtusen.

Den tilsynelatende bevegelsen til planetene som gjorde at episykler ble innført, er egentlig en optisk illusjon som følge av de ulike hastighetene planetene har i forhold til hverandre. Se figur 3.

Den kopernikanske modell ble senere utfordret av Tycho Brahe og Johannes Kepler.



Figur 3. Illustrasjon av tilsynelatende planetbevegelse sett fra jorda.
Kilde: http://www.astronomynotes.com/history/s4.htmA3.3

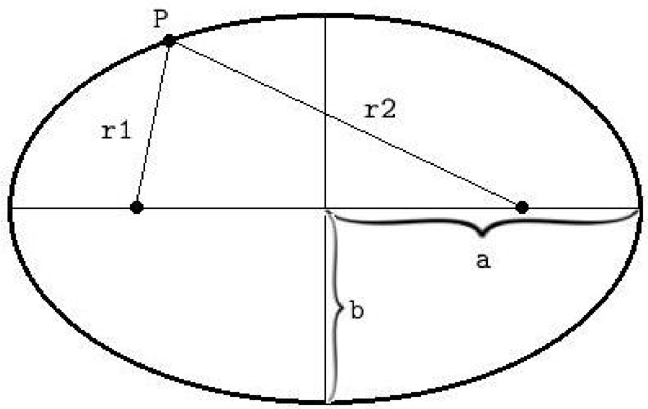
2. Johannes Kepler (1571-1630)

Johannes Kepler var en tysk matematiker og astronom. På slutten av 1550-tallet var han assistenten til den danske astronomen Tycho Brahe (1546-1601). Brahe gjorde datidens mest presise observasjoner og målinger av planetenes posisjoner, og han utviklet teorier om sirkulære planetbaner. Disse teoriene stemte i større grad overens med observasjonene enn tidligere teorier og modeller som også hadde basert seg på at planetene bevegde seg i sirkler med konstant hastighet. Da Kepler fikk tilgang til Brahes målinger for å beregne Mars' bane, fant han ut at dersom man antar at planetenes baner er elliptiske, vil teorien stemme overens med observasjonene. Dette kjenner vi i dag som Keplers første lov. Videre fant at ut at planetenes hastighet var omvendt proporsjonal med avstanden til sola, og formulerte det vi kjenner som Keplers andre lov. Senere oppdaget han sammenhengen mellom planetbanens omløpstid og gjennomsnittsavstanden mellom planeten og sola.

3. Ellipse

Før Kelpers lover blir introdusert, kan det være en fordel å se på noen av egenskapene til en ellipse. En ellipse er en geometrisk figur der summen av avstandene fra hvert brennpunkt til et punkt på ellipsen er den samme for hvert punkt på ellipsen. På figur 4 vil dette si $r_1 + r_2 =$

$2a$, der a kalles ellipsens store halvakse. En sirkel er en spesiell ellipse der brennpunktene sammenfaller.

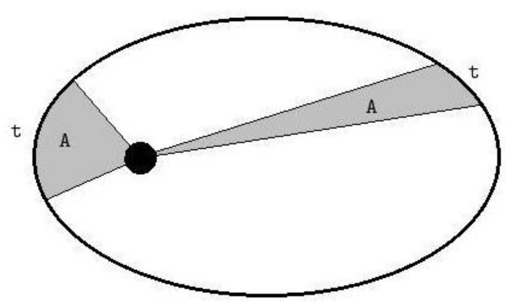


FIGUR 4. Ellipse med stor halvakse a og liten halvakse b.

4. KEPLERS LOVER

Keplers oppdagelser oppsummeres i tre lover:

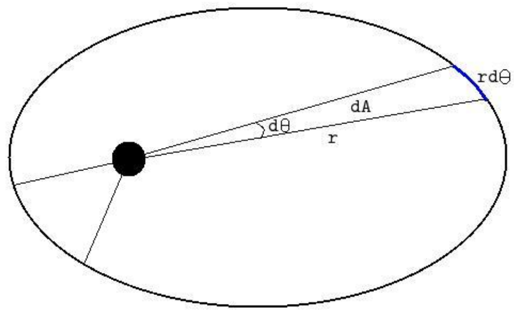
(1) Planetenes baner rundt sola er elliptiske, med sola i det ene brennpunktet.
(2) Linja mellom planeten og sola sveiper over det samme arealet på like tidsintervaller.
(3) For alle planetene gjelder $T^2 \propto a^3$, der T er planetens omløpstid, og a er ellipsens store halvakse.



FIGUR 5. Keplers 2. lov

Bevis for Keplers andre lov

For å bevise Keplers andre lov, vil vi vise at endringen av et areal som i figur 5 vil være konstant for et gitt tidsintervall.



Figur 6. Skisse til beviset av Keplers andre lov

Dersom vi ser på et lite tidsintervall dt, vil området linja mellom solen og planeten sveiper over, være en trekant med grunnflate r og høyde $rd\theta$ (se figur 6). Arealet til denne trekanten blir da

$$dA = \frac{1}{2}r \cdot rd\theta = \frac{1}{2}r^2 d\theta$$

Om vi deretter ser på endringen av arealet i det lille tidsintervallet dt, får vi

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2}r^2\frac{d\theta}{dt}$$

Systemets dreieimpuls (eller spinn) er gitt ved

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$$

der $\vec{r}$ er posisjonsvektoren og $\vec{p} = m\vec{v}$ er bevegelsesmengden til planeten. Vinkelhastigheten ω er endringen av vinkelen per tid, $\omega = \frac{d\theta}{dt}$, og med sammenhengen $v = \omega r$ får vi

$$|\vec{L}| = L = m\omega r^2 = mr^2\frac{d\theta}{dt} \implies r^2\frac{d\theta}{dt} = \frac{L}{m}$$

Så vi får et uttrykk for endringen av arealet i et tidsintervall dt:

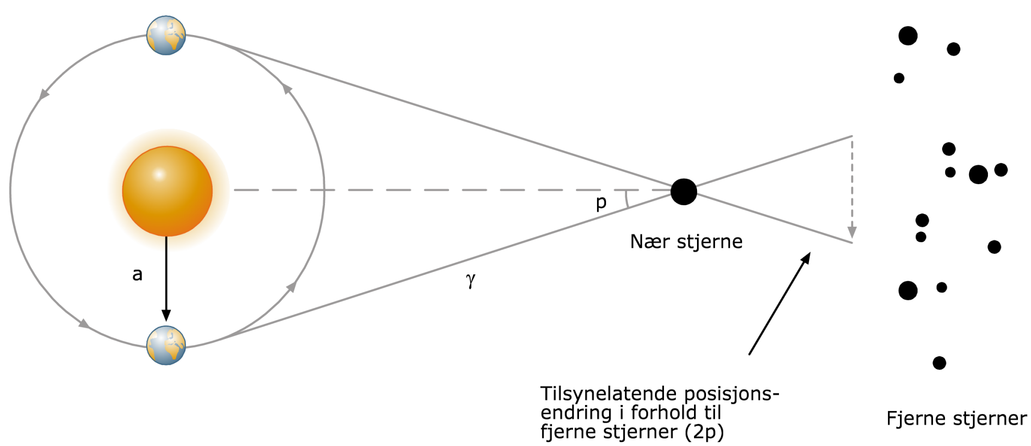
$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2}r^2\frac{d\theta}{dt} = \frac{L}{2m}$$

I denne situasjonen er L konstant, $\frac{dL}{dt} = 0$, siden systemet er i likevekt. Derfor kan vi konkludere med at for en planet med masse m og dreieimpuls L, vil endringen av arealet være konstant for alle like tidsintervaller.

5. **Parallakse**

En av metodene som brukes for å bestemme avstanden mellom jorden og nære stjerner kalles solar parallakse og baserer seg på prinsippet triangulering. Dette er en trigonometrisk teknikk.

Trigonometri kan brukes til å beregne avstanden mellom jorden og relativt nære stjerner på denne måten: Vi fotograferer en stjerne to ganger, med ca. 6 måneders mellomrom. På denne tiden har jorden rotert en halv runde om solen. Ved å se på posisjonen til stjernen i forhold til fjærnere stjerner i bakgrunnen kan det som kalles parallaksevinkelen bestemmes. Halve parallaksevinkelen er vinkelen mellom linjen fra stjernen til jorden og en linje fra solen til stjernen, som står ortogonalt på solen. Se figur under.



FIGUR 7. Parallakse

Vi vet hva middelavstanden mellom jorden og solen er. Astronomene kaller denne avstanden 1 A.U., som står for 1 astronomical unit. Når vi vet denne avstanden og vinkelen som kalles p i figuren (dette er halve parallaksevinkelen), kan vi enkelt beregne lengden til γ i figur 7 ved hjelp av kjente trigonometriske regler. Vi vet at i den rettvinklete trekanten mellom jorden, solen og den nære stjernen i figuren er:

$$\sin p = \frac{1 \text{ A.U.}}{\gamma}$$

$$\implies \gamma = \frac{1\text{A.U.}}{\sin p}$$

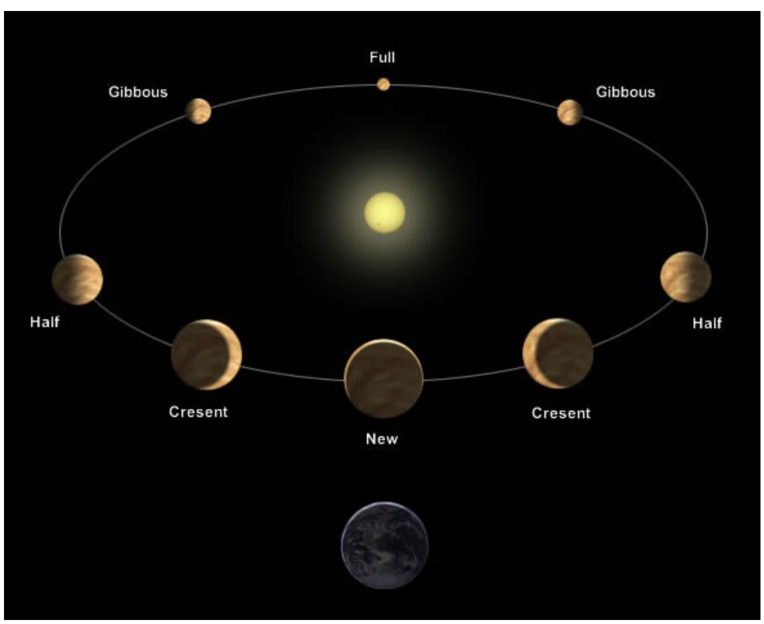
Parallakse metoden kan kun brukes til å bestemme avstanden til relativt nære stjerner. Jo lenger unna stjernen er, jo mindre blir parallaksevinkelen og målingen blir mindre nøyaktig. De beste teleskopene kan måle parallaksevinkler helt ned i 0,001 buesekunder, som er tilnærmet lik $2,78 \cdot 10^{-7}$ grader! Dette gjør at vi kan bestemme avstander til stjerner som ligger opptil 1000 parsec $= 3 \cdot 10^{19}$ meter, som er litt over 3261,6 lysår, unna jorden ved hjelp av parallaksemetoden.

Men de fleste stjernene i vår galakse er mye lenger unna oss enn 1000 parsec. Diameteren til Melkeveien er til sammenligning ca. 30 000 parsec.

6. Avstanden mellom solen og jorden

Vi vet i dag med ganske stor nøyaktighet hvor langt det er mellom solen og jorden. Den avstanden vi bruker kalles middelavstanden. Vi vet jo at jordens bane om solen er ellipseformet, så avstanden er ikke konstant. Den verdien som brukes er derfor et snitt av avstanden til forskjellige tider. Lengden kalles én astronomisk enhet (1 A.U.) og er beregnet til være 149 597 871 kilometer. Men menneskene har ikke alltid visst hvor langt det var mellom solen og oss. Faktisk hadde astronomene på slutten av 1600 tallet bestemt avstanden mellom jorden og flere av planetene i solsystemet relativt til avstanden fra jorden til solen. Problemet var bare at de ikke visste hvor langt det var mellom jorden og solen. For eksempel visste de at det var ca. 5 ganger lenger mellom jorden og Jupiter enn mellom jorden og solen. Likevel kunne de altså ikke vite hvor langt det var, siden de ikke visste avstanden til sola.

Den første som skulle gjøre en beregning av denne avstanden var Christian Huygens. Men for å gjøre sine beregninger måtte han bruke en opplysning man ikke visste om stemte. Huygens brukte fasene til Venus for å beregne avstanden. Astronomene hadde oppdaget at Venus gjennomgikk et sett med faser, akkurat som månen gjør:



Figur 8. Fasene til Venus

Huygens benyttet seg av disse fasene når han skulle gjøre sine beregninger. Han visste at fasen til Venus avhang av vinkelen mellom planeten og sola, sett fra jorda. Hvis du kan bestemme to vinkler i en trekant og vet én av lengdene i trekanten kan du bestemme lengden til en annen side. Men Huygens trengte som sagt en opplysning han ikke kunne være sikker på for å gjøre sine beregninger. For å bestemme avstanden mellom jorden og Venus (som han trengte for beregningene sine) måtte Huygens anta noe om størrelsen til Venus. Huygens antok at Venus var like stor som jorden. I ettertid har dette viste seg å stemme godt (Venus sin diameter er 12 103,6 km og jordens er 12 765,3 km). Så det resultatet Huygens kom frem til stemmer faktisk veldig godt med virkeligheten. Resultatet ble derimot ikke tatt så godt i mot av publikum på den tiden, ettersom at ingen kunne være sikre på at det faktisk stemte at Venus er like stor som jorden. Selv om Huygens resultat kun er ca. 7 % feil i forhold til den avtanden vi regner med i dag, fikk han ikke æren for å ha funnet avstanden mellom jorden og solen.

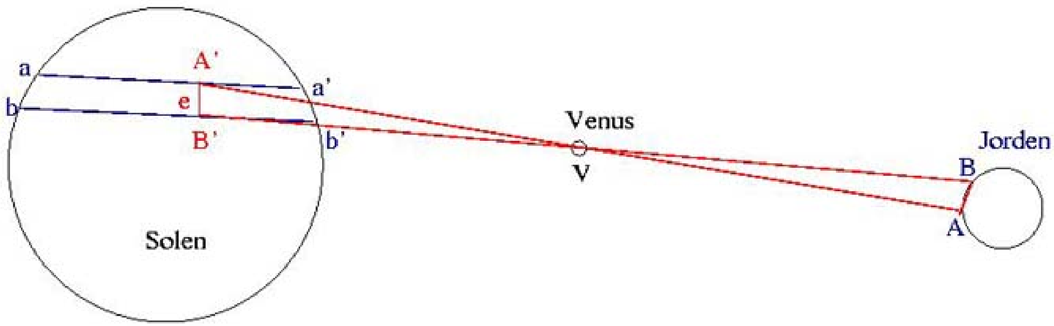
Venuspassasjen

En del år etter at Huygens mente han hadde bestemt avstanden skulle Edmond Halley prøve å beregne avstanden uten å bruke beregninger basert på antakelser.

Med jevne mellomrom passerer Venus mellom solen og jorden, og da synes Venus som en svart prikk på soloverflaten. En slik hendelse kalles en *Venuspassasje* og oppstår fordi Venus sine bane om solen ligger innenfor jorden sin.

Slike passasjer er skjeldne, men opptrer i par. Mellom parene av passasjer går det rundt 105 eller 121 år (det kan også gå enda flere år mellom dem), og mellom passasjene i et slikt par går det 8 år. Allerede i 1678 la Halley frem resultater om at man ved å observere en slik passasje kunne finne avstanden mellom solen og jorden på følgende måte:

Fra to forskjellige observasjonspunkter på jorden vil Venus følge to litt ulike linjer over solskiven under passasjen. Vi kaller de to observasjonspunktene på jorden A og B (se figur 9). Observatøren i det sørligste punktet (A) vil observere Venus sin bevegelse over solskiven som linjen $a - a'$, og observatøren i det nordligste punktet (B) vil observere den som linjen $b - b'$. Ser vi på forskjellen i possisjonen til Venus ved et gitt tidspunk (A' for observatør A og B' for observatør B), kan vi finne avstanden mellom linjene, linjen e i figur 9.



Figur 9. Skisse av hvordan målingene under en Venus-passasje kan brukes til å beregne avstanden mellom jorden og solen. Målestokken i figuren er ikke riktig. Kilde: http://www.astroevents.no/venusavstand.html

Vi har nå at trekantene AVB og $A'VB'$ er formlike, så om vi kaller avstanden mellom solen og Venus VS og avstanden mellom jorden og Venus JV, har vi:

$$e = AB \cdot \frac{VS}{JV}$$

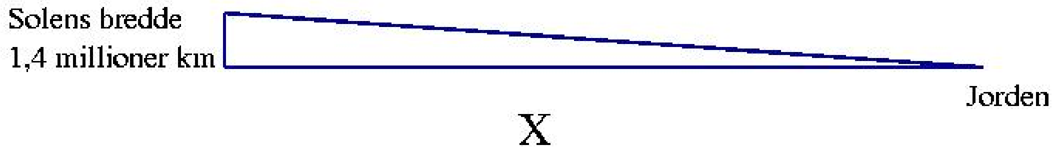
Her kan vi bruke Keplers 3. lov. Vi setter jordens omløpstid om solen til å være $P_j = 365{,}25$ døgn og Venus sin til $P_V = 224{,}70$ døgn. Ved Keplers 3. lov er

$$e = AB \cdot \frac{VS}{JV} = AB \cdot \left[\left(\frac{P_j}{P_V} \right)^{2/3} - 1 \right]^{-1} = \frac{AB}{\left(\frac{P_j}{P_V} \right)^{2/3} - 1}$$

Setter vi inn verdiene får vi

$$e = \frac{AB}{0,381248} = 2,62 \cdot AB$$

Så om vi f.eks. antar at avstanden mellom A og B på jorden er 2000 km, får vi $e = 2{,}62 \cdot 2000$ km $= 5240$ km. Fra dette kan vi beregne at solens diameter er 1,4 millioner km. Dette kan videre brukes til å beregne avstanden mellom jorden og solen. Solens vinkeldiameter er omtrent 32 bueminutter, det samme som månen sin, noe som tilsvarer litt over en halv grad og 0,00925 radianer.

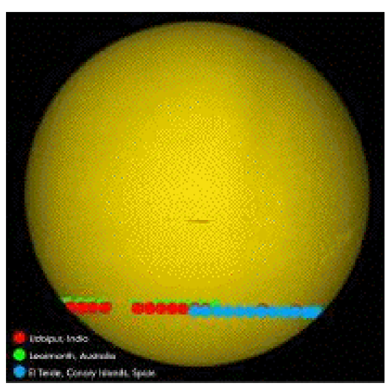


FIGUR 10. Solvinkeldiameter.
Kilde: http://www.astroevents.no/venusavstand.html

Fra figur 10 kan vi nå regne ut at avstanden mellom jorden og Solen, X, er

$$X = \frac{1,4 \cdot 10^6 \text{ km}}{0,00925} \approx 150 \cdot 10^6 \text{ km}.$$

Dette virker til å være en god metode til å bestemme den ønskelige avstanden på. Problemet er bare at de tilsynelatende forskjellige banene til Venus over soloverflaten sett fra de to forskjellige stedene på jorden, ligger veldig nære hverandre. Figur 11 viser observasjoner av venuspassasjen i 2004 fra tre forskjellige observasjonssteder på jorden. Hver farge representerer observasjonene fra ett sted. Som vi ser ligger disse veldig tett.



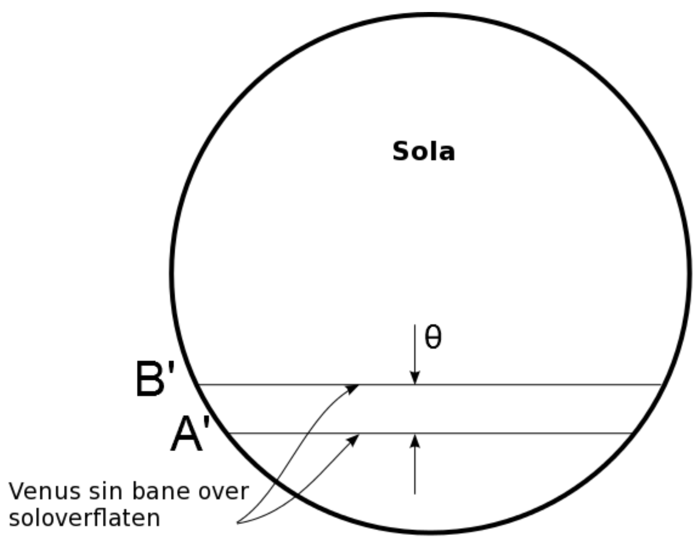
FIGUR 11.
Kilde: http://www-istp.gsfc.nasa.gov/stargaze/Svenus1.htm

Dette betyr at det kan være vanskelig å bestemme avstanden e i figur 9, og den kan iallefall ikke bestemmes med god nok nøyaktighet. Halley forutså at dette kunne være tilfalle og fant derfor ut hvordan avstanden e kunne beregnes uten å kunne måle avstanden direkte. Metoden han foreslo gikk ut på å måle hvor lang tid Venus brukte over solskiven observert på de forskjellige stedene. Venus vil ha samme hastighet over solskiven, så for observatør B i figur 9 vil Venus bruke lenger tid enn for observatør A. I figur 12 måler vi avstanden e som en vinkel θ. Vi antar at Venus har en hastighet på d_v over solskiven og at T_A og T_B er varigheten av passasjen for henoldsvis observatør A og B. Da er lengden til A' i figur 12

$$T_A \cdot d_v$$

og lengden til B' er

$$T_B \cdot d_v.$$

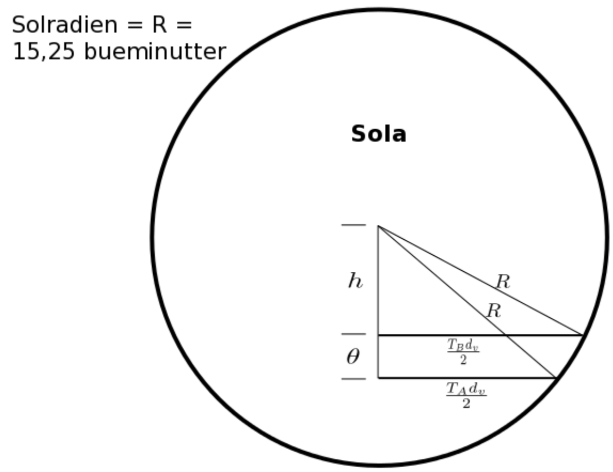


Figur 12. Kilde: http://brightstartutors.com/blog/2012/the-transit-of-venus/

Astronomene visste hva solradien var, $R = 15,25$ bueminutter (husk at vi her regner med vinkler istedenfor meter). Ved å se på trekantene i figur 13 ser vi nå at θ er forskjellen i høyde til de to rettvinklede trekantene med grunnflate $\frac{T_A \cdot d_v}{2}$ og $\frac{T_B \cdot d_v}{2}$, som begge har hypotenus lik solradien. Dette gir at

$$\theta = \sqrt{R^2 - \left(\frac{T_A d_v}{2}\right)^2} - \sqrt{R^2 - \left(\frac{T_B d_v}{2}\right)^2}$$

(se figur 13.)



$$\theta = \sqrt{R^2 - \left(\frac{T_A d_v}{2}\right)^2} - \sqrt{R^2 - \left(\frac{T_B d_v}{2}\right)^2}$$

FIGUR 13. Kilde: http://brightstartutors.com/blog/2012/the-transit-of-venus/

Dermed kunne de bestemme avstanden e kun ved å vite hvor lang tid passasjen tok, observert de forskjellige stedene på jorden.

Det var altså Edmond Halley som fant frem til denne måten å beregne avstanden e på, men den neste Venuspassasjen kom ikke før i 1761, og Halley rakk dessverre aldri å oppleve passasjen (han døde i 1742, 85 år gammel). Det var likevel mange som var ivrige etter å observere passasjen i 1761. Mange nasjoner prøvde å gjøre gode observasjoner, men de fleste ble dårlige, bl.a. grunnet tykt skydekke flere steder. Dermed kunne ikke avstanden mellom jorden og solen bestemmes med sikkerhet etter passasjen i 1761 heller. Det viktisgst resultatet av observasjonene i 1761 var antakeligvis oppdagelsen av at Venus har en atmosfære.

Heldigvis var passasjen i 1761 den første i et par, så allerede åtte år senere, i 1769, fikk astronomene mulighet til å observere en ny passasje. Venus ville nå passere solskiven mens det var natt i Europa, så astronomer som ville observere passasjen måtte enten dra vest- eller nordover, der det ville være midnattssol.

Den ungarske atronomen Maximilian Hell dro til Vadsø i Nord-Norge for å observere passasjen. Selv om det skyet til under passasjen klarnet det akkurat nok til at observasjonene hans ble gode nok (han fikk gjort målinger idet Venus kom inn på solskiven og idet Venus "forlot" solskiven igjen). Etter at han kom tilbake til Wien sammenlignet han sine resultater med målinger James Cook og Chappe d'Auteroche hadde gjort av passasjen fra Tahiti. Hell beregnet solparallaksen til å være $8,70 \pm 0,03$ buesekunder. Dette er veldig nærme det vi idag regner med; en solparallakse på 8,79 buesekunder. Denne solparallaksen gir en avstand til solen på 149 597 871 kilometer.

Men det var flere som la frem resultater etter passasjen. Resultatene lå i intervallet fra 146 000 000 km til 151 000 000 km, som alle var maksimalt ca. 2,6 % unna den verdien vi regner med i dag. Dermed kunne også avstandene til andre objekter i solsystemet gis i meter og kilometer, og ikke kun i jord-sol enheter.

7. Magnituder og avstand

Denne delen omhandler hvordan en kan bruke lysstyrken til en stjerne til å finne avstanden til den. I den forbindelse kommer vi til å trekke inn matematiske begreper som logartimer og sfærisk geometri. Først skal vi greie ut om teori knyttet til stjerners lysstyrke, og deretter skal vi utlede en avstandsformel.

Utgangspunktet for avstandsformelen er et system der stjernene er rangert etter lysstyrken. Dette klassifiseringssystemet stammer fra systemet til den greske astronomen Hipparchus (omtrent 150 år f.kr.) Han brukte sine egne øyne til å rangere lysstyrken til 850 stjerner, og systemet han skapte består av en skala med verdier fra 1 til 6, i stigende rekkefølge fra de sterkest lysende stjernene til de svakest lysende stjernene. Hver av disse verdiene i skalaen kalles magnituder, og stjerner innenfor samme magnitudeklasse (samme skalaverdi) har omtrent samme lysstyrke. Stjerner med lav magnitude er stjerner som lyser sterkt, mens stjerner med høy magnitude er de som lyser svakt. For eksempel, hvis Hipparchus kom over en stjerne som lyste så sterkt at den var blant de sterkest lysende stjernene på himmelen, så ville han ha plassert denne stjernen i magnitudeklassen med verdi 1. Magnitudeverdien er ikke en størrelse vi kan måle empirisk (den har ingen enhet), men den er en verdi som sier noe om hvor sterkt en stjerne lyser i forhold til andre stjerner. Når det kommer til målingen av selve lysstyrken til stjernene, så er det størrelsen fluks vi måler. Fluks er definert som stjernens energi strålt ut per tid per arealenhet ($W/s/m^2$).

Den engelske astronomen Norman Pogson ($1829 - 1891$) var interessert i systemet til Hipparchus. På midten av 1800-tallet oppdaget han at stjerner med magnitude 1 lyser 100 ganger sterkere enn stjerner med magnitude 6. Denne sammenhengen var en viktig oppdagelse, for den betydde at magnitudeskalaen er en logaritmisk skala og bidro til utledningen av avstandsformelen. En logartimisk skala er en skala der en endring av en enhet på skalaen betyr en endring med en gitt faktor for den verdien som hver enhet på skalaen representerer. I tilfellet med magnitudeskalaen vil det si at en økning på én magnitude på skalaen vil tilsvare en minking i lysstyrke med en gitt faktor. Siden forholdstallet til lysstyrken til to stjerner med magnitude 1 og 6 har verdi 100, er forholdet mellom to etterfølgende enheter på magnitudeskalaen gitt ved 5-te roten av 100. Dette fordi en må multiplisere lysstyrken til en stjerne som har magnitude 6 med faktoren $100^{\frac{1}{5}}$ hele 5 ganger for å få lysstyrken til en stjerne som har magnitude 1, ettersom dette er en endring med 5 enheter på magnitudeskalaen. For eksempel vil en stjerne med magnitude 1 lyse $(100^{\frac{1}{5}})^2$ ganger sterkere enn en stjerne med magnitude 3 og den vil lyse $(100^{\frac{1}{5}})^4$ ganger sterkere enn en stjerne med magnitude 5. Mer generelt vil vi, dersom vi har en stjerne med fluks F_1 og magnitude m_1 og en annen stjerne med fluks F_2 og magnitude m_2, dermed ha følgende relasjon:

$$F_1 \cdot (100^{\frac{1}{5}})^{m_1 - m_2} = F_2$$

Vi vil nå jobbe videre med dette uttrykket for å komme fram til avstandsformelen:

$$\begin{aligned}
F_1 \cdot (100^{\frac{1}{5}})^{m_1 - m2} &= F_2 \\
(100^{\frac{1}{5}})^{m_1 - m_2} &= \frac{F_2}{F_1} \\
100^{\frac{m_1 - m_2}{5}} &= \frac{F_2}{F_1} \\
\log 100^{\frac{m_1 - m_2}{5}} &= \log \frac{F_2}{F_1} \\
\frac{m_1 - m_2}{5} \cdot \log 100 &= \log \frac{F_2}{F_1} \\
\frac{m_1 - m_2}{5} \cdot 2 &= \log \frac{F_2}{F_1} \\
\frac{2(m_1 - m_2)}{5} &= \log \frac{F_2}{F_1} \\
m_1 - m_2 &= \frac{5}{2} \log \frac{F_2}{F_1} \\
m_1 - m_2 &= -\frac{5}{2} \log \frac{F_1}{F_2} \qquad (1)
\end{aligned}$$

Med denne ligningen kan vi finne forholdet mellom fluksene til to stjerner som vi kjenner magnitudene til. Vi ser at når $m_1 < m_2$ så er $F_1 > F_2$, og når $m_1 > m_2$ så er $F_1 > F_2$. Dette stemmer overens med at en høy verdi i magnitude tilsvarer svak lysstyrke, og en lav verdi i magnitude tilsvarer sterk lysstyrke. Vi ønsker å finne avstanden fra jorden til en stjerne ved hjelp av teori knyttet til magnituder. For denne metoden trenger vi ikke informasjon om to stjerner som tidligere nevnt, vi kan finne avstanden til en stjerne med kun informasjon om den aktuelle stjernen. For å gjøre det må vi skille mellom to ulike typer av magnituder for en stjerne, og det er de to verdiene som settes inn i avstandsformelen. Den første typen er stjernens tilsynelatende magnitude (notert med m_2), og det er den vi har referert til tidligere, altså lysstyrken som vi observerer fra jorden. Absolutt magnitude (notert med m_1) er lysstyrken som vi observerer dersom vi hadde "flyttet" stjernen til en avstand på 10 parsec unna jorden (1 parsec = 3.26 lysår). Denne avstanden på 10 parsec er en standard, og det er alltid den avstanden som gir absolutt magnitude. Vi går ikke inn på hvordan en kommer fram til verdiene for magnituder i denne oppgaven, siden vi vil fokusere på den relevante matematikken.

Før vi kan gå videre med å utlede avstandsformelen trenger vi også å se nærmere på de to variablene F_1 og F_2 i ligning (1). Disse variablene representerer fluksen til en stjerne slik vi måler den fra jorden og den verdien den har i avstanden 10 parsec fra jorden. Som nevnt tidligere er fluks definert som energi utstrålt per tid per areal: $dF = \frac{dE}{dTdA}$. Dersom vi summerer opp over hele overflatearealet til stjernen, vil vi få stjernens totale energi utstrålt per tid. Denne størrelsen kalles luminositet, og siden energi er bevart er luminositeten til en stjerne konstant. Men siden fluks er luminositet per arealenhet, vil fluksen avhenge av i hvilken avstanden fra stjernen vi måler fluksen. Det vi kan tenke oss er at vi legger et kuleskall med en viss radius r rundt stjernen for å finne fluksen i en avstand r fra stjernen. Jo lenger unna stjernen vi kommer, jo større vil kuleskallet bli og dermed også arealet, og fluksen avtar som en følge av dette. Vi har følgende formel for fluksen:

$$F = \frac{L}{4\pi r^2} \qquad (2)$$

der L er luminositeten, og r er radien til kuleskallet og den avstanden fra stjernen vi måler fluksen i. For fluksen F_2, som er stjernens fluks slik vi måler den på jorden, har kuleskallet radius r_2, og det er avstanden fra stjernen til jorden. For fluksen F_1, som er stjernens fluks i en avstand på 10 parsec fra jorden, har kuleskallet radius $r_1 = 10$ parsec. Nå setter vi uttrykk (2) inn for F_1 og F_2 i ligning (1):

$$m_1 - m_2 = -\frac{5}{2} \log \frac{\frac{L_1}{4\pi r_1^2}}{\frac{L_2}{4\pi r_2^2}}$$

Siden luminositeten er uavhengig av avstanden vi måler den i (den er konstant), så er $L_1 = L_2$, og disse kanselleres. Det samme gjør 4π, og vi står igjen med:

$$
\begin{aligned}
m_1 - m_2 &= -\frac{5}{2}\log\frac{r_2^2}{r_1^2} \\
m_1 - m_2 &= -\frac{5}{2}\log(\frac{r_2}{r_1})^2 \\
m_1 - m_2 &= -2\cdot\frac{5}{2}\log\frac{r_2}{r_1} \\
m_1 - m_2 &= -5\log\frac{r_2}{r_1} \\
\frac{m_1 - m_2}{5} &= -\log\frac{r_2}{r_1} \\
10^{\frac{m_1-m_2}{5}} &= -10^{-\log\frac{r_2}{r_1}} \\
10^{\frac{m_1-m_2}{5}} &= \frac{r_2}{r_1} \\
r_1\cdot 10^{\frac{m_1-m_2}{5}} &= r_2
\end{aligned}
$$

Vi har nå kommet fram til avstandsformelen. Vi kan bruke denne til å finne avstanden fra jorden til en stjerne, variabel r_2, ved å sette inn verdier for tilsynelatende og absolutt magnitude, og $r_1 = 10$ parsec.

I denne oppgaven har vi presentert avstandsberegning ved hjelp av stjerners magnituder og trigonometri, og hensikten har vært å fokusere på matematikken knyttet til denne teorien. Av de matematiske temaene som har vært trukket fram er både logaritmer, sfærisk geometri og plangeometri temaer som er relevante i undervisningssammenheng i videregående skole. Siden magnitudeskalaen er en logaritmisk skala, er den et fint eksempel å bruke i undervisning. Et slikt eksempel kan gjøre det enklere for elever å skjønne hva logaritmer er, fordi de hører om det i en praktisk sammenheng.

8. Kilder:

- http://curious.astro.cornell.edu/question.php?number=190
- http://www.astronomynotes.com/history/s1.htm
- http://no.wikipedia.org/wiki/Klaudios_Ptolemaios
- http://no.wikipedia.org/wiki/Nikolaus_Kopernikus
- http://www.math.nus.edu.sg/aslaksen/projects/LuTianxin-urops.pdf
- http://csep10.phys.utk.edu/astr161/lect/history/kepler.html
- http://en.wikipedia.org/wiki/Johannes_Kepler
- http://en.wikipedia.org/wiki/Tycho_Brahe
- http://no.wikipedia.org/wiki/Drivmoment
- http://lcogt.net/spacebook/parallax-and-distance-measurement
- http://www.badastronomy.com/mad/1996/au.html
- http://brightstartutors.com/blog/2012/the-transit-of-venus/
- http://www.astroevents.no/venusavstand.html
- http://www.mn.uio.no/astro/tjenester/publikum/almanakken /innhold/tema2012.html
- http://kollokvium.no/2012/05/29/venuspassasjen-hvorfor-sa-mye-stak-om-noe-sa-kjedelig/
- http://www.verdensrommet.org/sites/default/files/users/3/ Venuspassasjen%206%20juni%201761.pdf
- http://brightstartutors.com/blog/2012/the-transit-of-venus/
- http://earthguide.ucsd.edu/virtualmuseum/ita/06_3.shtml
- http://www.uio.no/studier/emner/matnat/astro/AST1100/h13/ undervisningsmateriale/ast1100-fullstendig.pdf
- http://www.uio.no/studier/emner/matnat/astro/AST1010/v11/ undervisningsmateriale/forelesningsnotater/f13_stjerners_straaling.pdf
- http://www.astro.washington.edu/users/ivezic/REU08/GDP/distance/ background2.html
- http://en.wikipedia.org/wiki/N._R._Pogson
- http://en.wikipedia.org/wiki/Hipparchus