Mellomprosjekt i MAT4010: Trekanter i planet

Anne Line Kjærgård, Cecilie Anine Thorsen og Marie Vaksvik Draagen

6. mai 2014

Innhold

1 Trekanter i plangeometri **3**

2 Oppgavebeskrivelse **3**

3 Generelle egenskaper til trekanter **3**
3.1 Toppvinkler 3
3.2 Vinkelsummen til en trekant 4
3.3 Egenskaper ved formlike trekanter 4
3.4 Kongruens 5
3.5 Egenskaper ved linjer i R2 5
3.6 Skjæringspunktet til diagonalene i et parallellogram 6
3.7 Midtsegmentteoremet 6

4 Halveringslinjer og innskrevet sirkel **7**

5 Medianer **11**

6 Høydene **14**
6.1 Bevis 1 14
6.2 Bevis 2 15

7 Midtnormalene og omskrevet sirkel **18**

8 Sammenheng mellom median, midtnormal og høyde **21**
8.1 Eulerlinjen 21
8.2 Nipunktssirkelen 24

1 Trekanter i plangeometri

2 Oppgavebeskrivelse

Vi har valgt dette temaet, da det er en del av pensum i R1 matematikk. Kompetansemålet vi vil fokusere på i denne oppgaven er:

- Elevene skal kunne utlede og bruke skjæringssetningene for høydene, halveringslinjene, midtnormalene og medianene i en trekant.

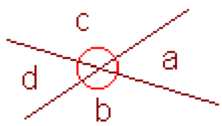
Vi vil også se på sammenhengen mellom medianer, høyder og midtnormaler og vise at skjæringspunktene for disse ligger på en rett linje, kalt Eulerlinjen. Avslutningsvis vil vi si noe kort om det som kalles nipunktssirkelen.

3 Generelle egenskaper til trekanter

Senere i denne oppgaven vil vi bruke flere av egenskapene til trekanter, og linjer som skjærer hverandre. Vi vil derfor se nærmere på dette.

3.1 Toppvinkler

Vi tegner to vilkårlige rette linjer, som ikke er parallelle. I skjæringspunktet mellom disse to linjene vil følgende vinkelegenskaper gjelde.



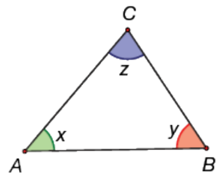
Figur 1: Toppvinkler

$$
\begin{aligned}
&c + a = 180^\circ \\
&d + c = 180^\circ \\
&c + a = d + c \\
&a = d
\end{aligned}
$$

Vi ser altså at $\angle a = \angle d$, tilsvarende er $\angle c = \angle d$.

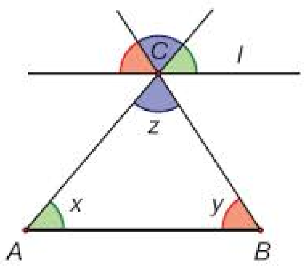
3.2 Vinkelsummen til en trekant

Det er allment kjent at vinkelsummen til en trekant er 180°. Vi vil nå gjøre et lett og intuitivt bevis for dette.



Figur 2: Vinklene til en vilkårlig trekant

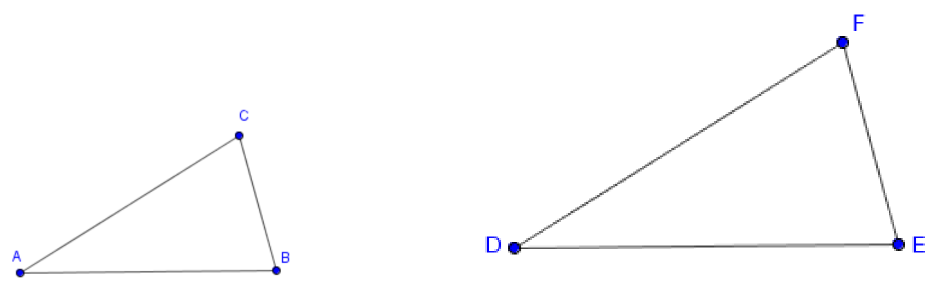
Ser vi på figur 2, har vi markert hver vinkel med en farge. Dersom vi nå lager en linje som er parallell med AB, som går igjennom punktet C, kan vi se på de samsvarende vinklene.



Figur 3: Vinkler til en trekant

Ser vi nå på figur 3 ser vi at vi alle vinklene til trekanten, ligger på en linje. Vi vet at en rett linje har vinkel 180°, og siden det er disse tre vinklene vi har i trekanen vår, må vinkelsummen til trekanten være 180°.

3.3 Egenskaper ved formlike trekanter



(a) ΔABC (b) ΔDEF

Figur 4: To formlike trekanter

To trekanter ΔABC og ΔDEF er formlike hvis og bare hvis de oppfyller et av de fire følgende kriteriene:

1. Trekanten har to parvis like vinkler.
2. Trekantene har en lik vinkel, og de tilhørende sidekantene er proporsjonale, for eksempel $\angle A = \angle D$, og $\frac{AB}{AC} = \frac{DE}{DF}$.
3. Sidekantene er parvis proporsjonale; $\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{AC}{DF}$.
4. Forholdet mellom lengdene til sidekantene er det samme i de to trekantene, for eksempel $\frac{AB}{AC} = \frac{DE}{DF}$ og $\frac{BC}{AC} = \frac{EF}{DF}$.

3.4 Kongruens

(a) ΔABC (b) ΔDEF

Figur 5: To kongruente trekanter

$\Delta ABC \cong \Delta DEF$ hvis og bare hvis et av følgende fire kriterier er oppfylt:

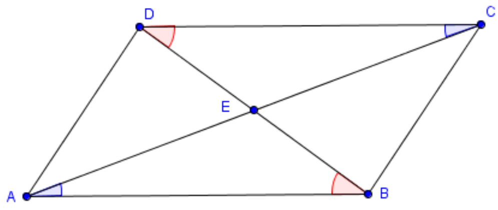
1. Trekantene har parvis like sider (SSS),
   $AB = DE$, $BC = EF$, $AC = DF$.
2. I de to trekantene er en vinkel og de tilhørende sidekantene like (SAS),
   $\angle A = \angle D$, $AB = DE$, $AC = DF$.
3. I de to trekantene er to vinkler og den mellomliggende sidekanten like (ASA),
   $\angle A = \angle D$, $\angle B = \angle E$, $AB = DE$.
4. I de to trekantene er to sider og den motstående vinkelen til den lengste av disse like (SSA),
   $AB = DE \geq BC = EF$, $\angle C = \angle F$.

3.5 Egenskaper ved linjer i R2

I R^2 kan vi ha

- Parallelle linjer (de vil aldri skjære hverandre).
- Ikke parallelle linjer (de vil skjære hverandre).

3.6 Skjæringspunktet til diagonalene i et parallellogram

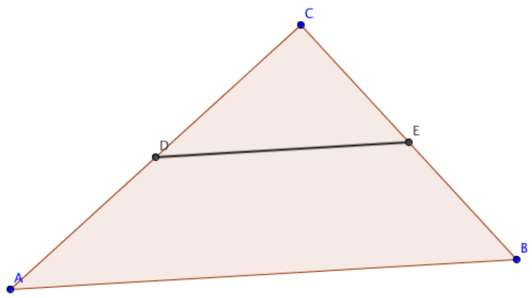


Figur 6: Parallellogrammet $ABCD$ med diagonalene AC og DB

La $ABCD$ være et parallellogram, og la E være skjæringspunktet til diagonalene.Siden $ABCD$ er et parallellogram, er sidene parvis like lange og parallelle. Dermed er $AB = CD$. Vi ser nå nærmere på trekantene ΔABE og ΔCED i parallellogrammet. $\angle CDE = \angle ABE$ fordi de er samsvarende vinkler ved parallelle linjer. Dette gjelder også for $\angle DCE$ og $\angle BAE$, så $\angle DCE = \angle BAE$. Dermed er to vinkler i de to trekantene like, og den mellomliggende sidekanten er like. Altså er ΔABE og ΔCED kongruente. Det vil si at $AE = CE$, og $DE = BE$. Diagonalene i et parallellogram skjærer hverandre altså i midtpunktet på begge diagonalene.

3.7 Midtsegmentteoremet

Midtsegmentteoremet sier at en linje mellom to midtpunkter på en trekant er parallell med den tredje siden i trekanten. Forholdet mellom linjen mellom midtpunktene og siden i trekanten er 1 : 2. Vi har altså at $DE \parallel AB$ og $DE = \frac{1}{2}AB$.



Figur 7: Midtsegmentteoremet

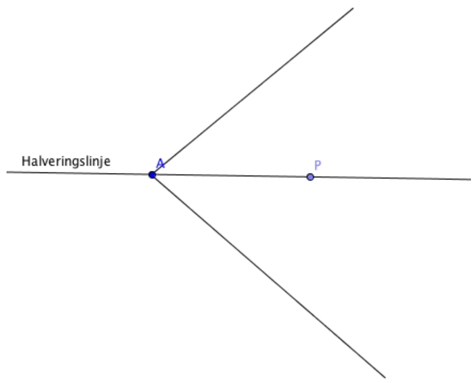
Bevis:
D er midtpunktet på linjestykket AC og da vet vi at $CD = DA$. Dermed har vi at $CA = CD + DA = 2CD$. Av samme grunn har vi at $CB = 2CE$. $\triangle CDE$ og $\triangle CAB$ har begge

$\angle C$ til felles. Vi vet og at $CD/CA = CE/CB = 1/2$. Siden forholdet mellom to av sidene i trekantene $\triangle CDE$ og $\triangle CAB$ er like og den mellomliggende vinkelen er lik, er trekantene formlike (se betingelser for formlikhet). Trekantene $\triangle CDE$ og $\triangle CAB$ er formlike, dermed har vi at $DE/AB = CD/CA = CE/CB = 1/2$. Da får vi at $DE = (1/2)AB$, og $\angle CDE$ og $\angle CAB$ er korresponderende vinkler i de formlike trekantene. Da vet vi at $\angle CDE = \angle CAB$. Linjestykkene AB og DE skjæres begge av linjestykket AC, og siden $\angle CDE = \angle CAB$ må vi ha at $DE \parallel AB$.

4 Halveringslinjer og innskrevet sirkel

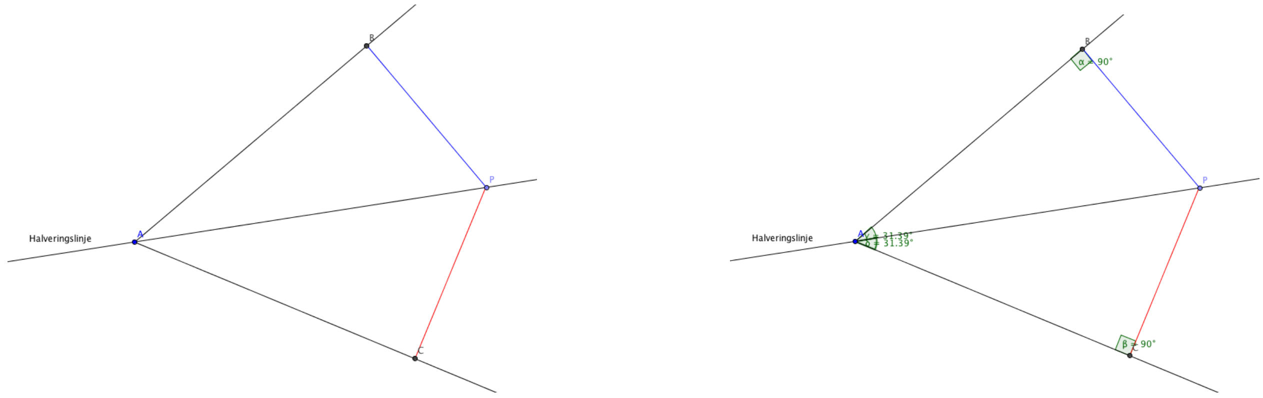
Halveringslinjen til en vinkel er det geometriske stedet for de punktene som ligger like langt fra begge vinkelbeinene. Ut ifra dette har vi at det følgende er sant:

Vi tegner en vilkårlig vinkel A og den tilhørende halveringslinjen. La P være et punkt på halveringslinjen.



Figur 8: Halveringslinje

Vi kan trekke normaler fra P ned på vinkelbeinene til $\angle A$ og kaller skjæringspunktene mellom normalene og vinkelbeinene for B og C.



(a) Normalene (b) Kongruens

Figur 9: To vilkårlige trekanter

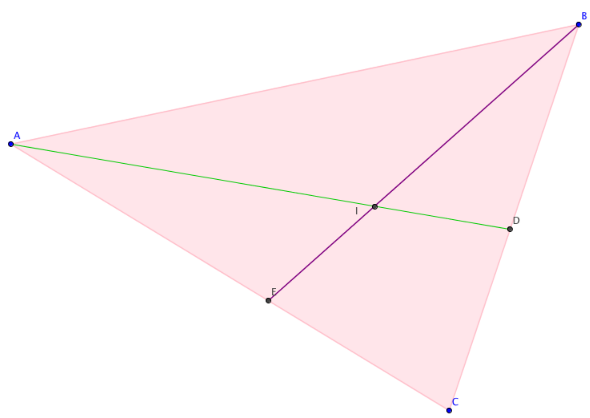
Vi vet nå at trekantene ABP og ACP er kongruente i og med at trekantene har to like vinkler, og AP er en felles og samsvarende side (hypotenusen) i trekantene. Da vet vi at $BP = CP$, og P ligger like langt fra begge vinkelbeinene.

P ligger på halveringslinja hvis og bare hvis P ligger like langt fra de to vinkelbeinene. Dette kan brukes til å vise at halveringslinjene for de tre vinkelene i en trekant har ett felles skjæringspunkt I. Det finnes da en sirkel med sentrum i I som vil tangere alle tre sidene i trekanten, som kalles den innskrevne sirkelen.

Bevis:
Vi tegner en vilkårlig trekant ABC, og trekker en linje fra $\angle BAC$ som deler vinkelen i to like store vinkler. Tilsvarende gjør vi for $\angle ABC$.

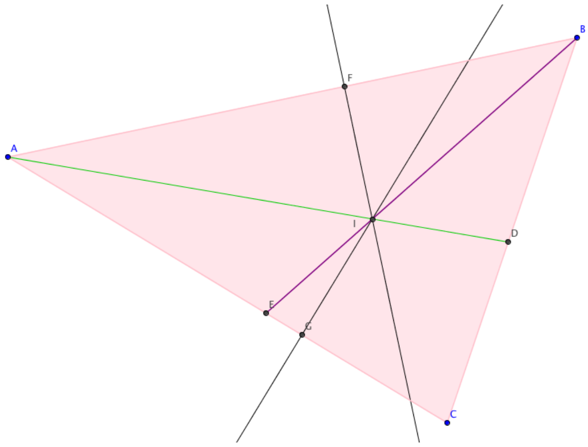
Linja fra vinkel $\angle BAC$ vil skjære BC i punktet D, og linja fra vinkel $\angle ABC$ vil skjære linja AC i punktet E.

Vi får at halveringslinjene til $\angle BAC$ og $\angle ABC$ vil skjære hverandre i et punkt I. Dette er fordi ingen av sidene i en trekant er parallelle, og da kan heller ikke halveringslinjene til vinklene i trekantene være parallelle.



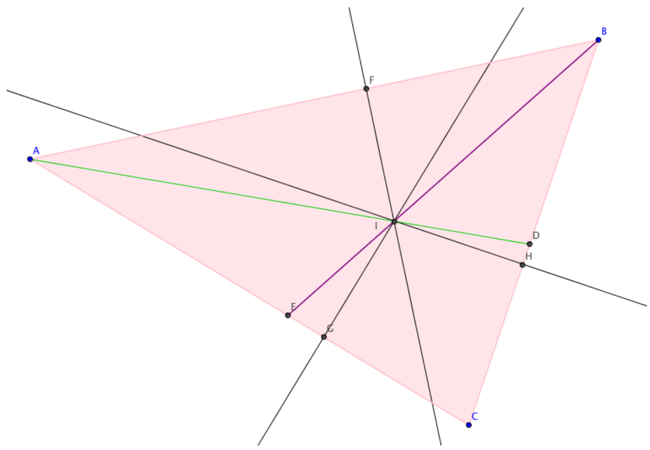
Figur 10: Skjæringspunkt

Siden punktet I ligger på halveringslinja til $\angle BAC$ vet vi at I vil ligge like langt unna AB og AC. Vi kan trekke en normal fra I til AB og fra I til AC. Da får vi punktene F og G, hvor $IF = IG$.



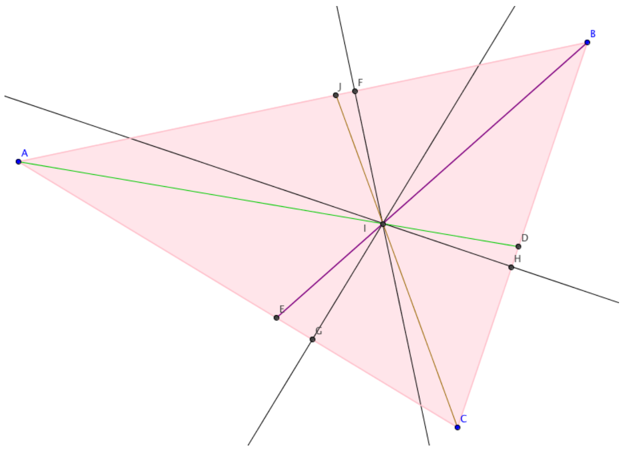
Figur 11: Normaler

Tilsvarende kan vi si om punktet I i forhold til sidene AB og BC, i og med at I også ligger på halveringslinja til $\angle ABC$. Normalene fra I ned på AB og BC vil skjære linjestykkene i punktet F og H. Vi får da at $IF = IH$. Men $IF = IG$, så $IG = IH$.



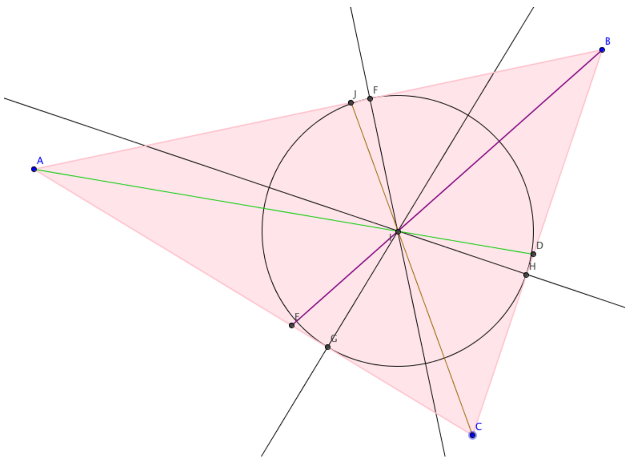
Figur 12: Normaler og halveringslinjer

Siden $IG = IH$, må I ligge på halveringslinja. En annen måte å se dette på er ved å dele $\angle GIH$ i to like store vinkler ved halvering. Da vet vi at vi får to trekanter som har to like sider, henholdsvis $IG = IH$ og halveringslinja fra $\angle GIH$. De vil også ha lik mellomliggende vinkel, da halveringslinjer deler vinkler i to like store vinkler (SAS). Derfor må halveringslinja fra I gå gjennom punktet C. Altså vil halveringslinjene til vinkelen i en trekant skjære hverandre i et punkt I.



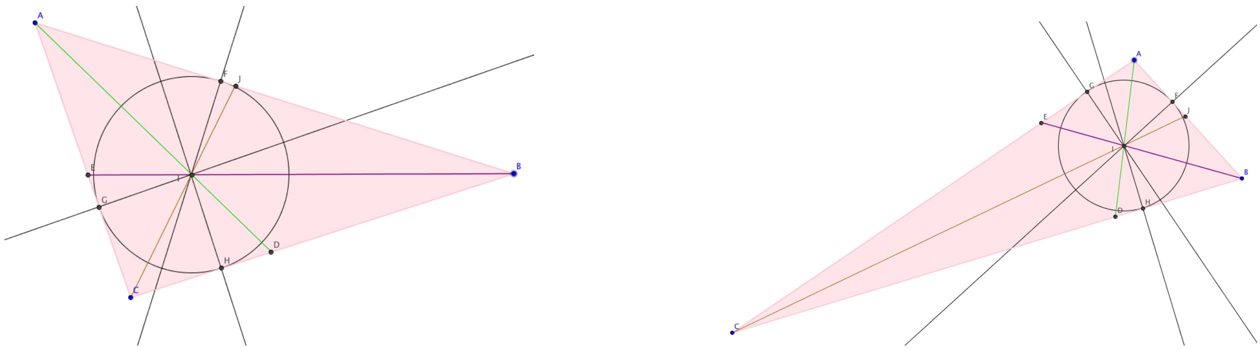
Figur 13: Skjæringspunkt

I og med at $IF = IG = IH$ kan vi konstruere en sirkel med sentrum i I med radius lik lengden IF. Da vet vi at $IG = r$ og $IH = r$. Vi får dermed en sirkel som tangerer sidene AB, BC og AC, og vi får en innskrevet sirkel.



Figur 14: Innskrevet sirkel

Videre kan vi trekke i hjørnene til trekanten og se at disse egenskapene fortsatt bevares. Innsenteret og den innskrevne sirkelen vil alltid befinne seg inne i trekanten.

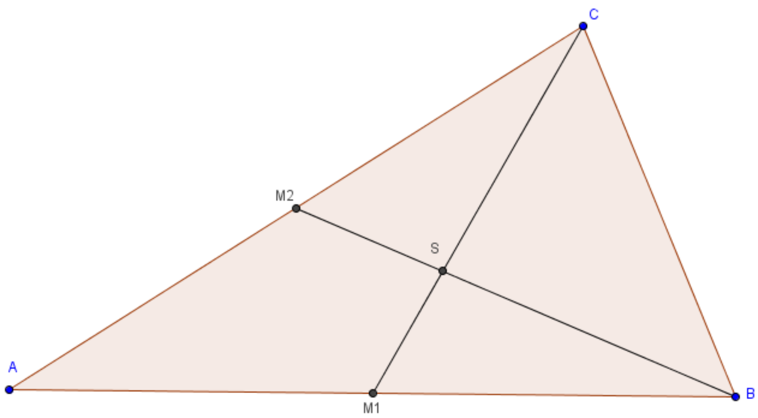


(a) ΔABC (b) ΔABC

Figur 15: To vilkårlige trekanter

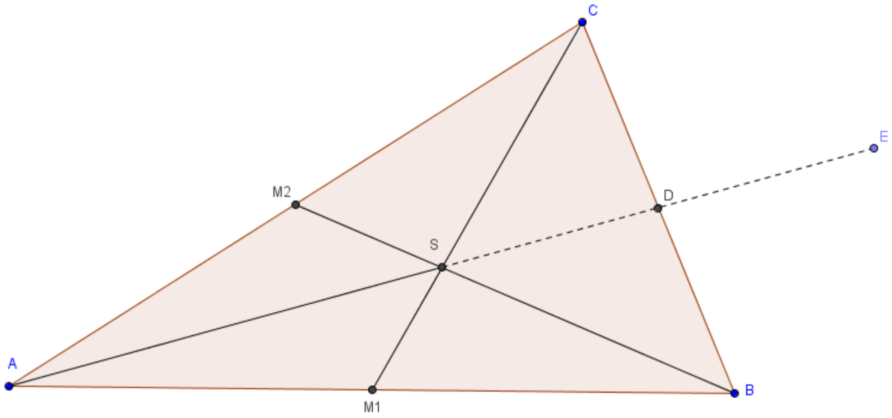
5 Medianer

Vi lar ΔABC være en vilkårlig trekant. Vi konstruerer medianen fra midtpunktet M_1 på AB til hjørne C. Deretter konstruerer vi medianen fra midtpunktet M_2 på AC til hjørne B.Siden medianene ikke er paralelle vil de skjære hverandre i et punk. Vi kaller dete skjæringspunktet S.



Figur 16: ΔABC med medianene fra M_1 til C, og fra M_2 til B

Vi trekker deretter en linje fra hjørne A til punktet S. Deretter forlenger vi denne linjen til et punkt E som er slik at $SE = AS$. Vi kaller skjæringspunktet mellom linjestykket SE og linjesykket CB for D.



Figur 17: ΔABC med AS og forlengelsen SE slik at $SE = AS$

Siden $SE = AS$ er

$$\frac{AS}{AE} = \frac{1}{2}$$

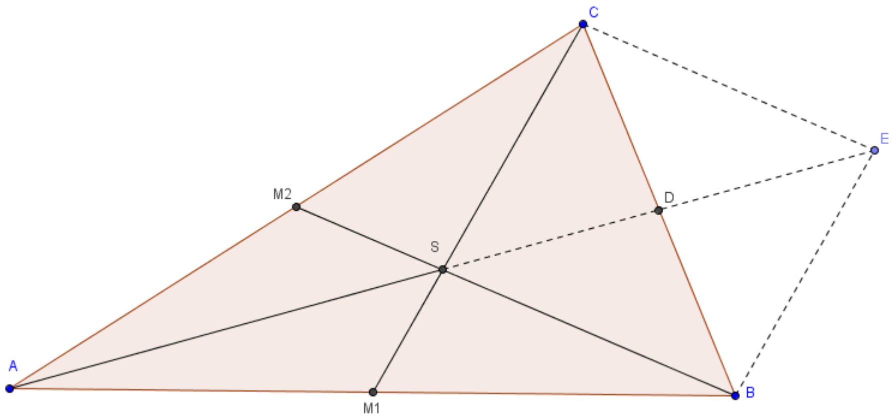
Siden M_2 er midtpunktet på AC er

$$\frac{AM_2}{AC} = \frac{1}{2}$$

og vi har også at $\angle M_2AS = \angle CAE$.

Altså har vi at forholdet mellom to par av samsvarende sider, AM_2/AC og AS/AE er det samme, og vinkelen mellom de de to parene av samsvarende sider er den samme. Det betyr at ΔASM_2 og ΔAEC er formlike: $\Delta ASM_2 \sim \Delta AEC$. Dermed er $EC \parallel SM_2$, og følgelig er $EC \parallel BS$.

Vi trekker nå et linjestykke fra E til C og et linjestykke fra E til B.



Figur 18: ΔABC med AS og forlengelsen SE slik at $SE = AS$

Vi ser nå på trekantene ΔASM_1 og ΔAEB. Siden M_1 er midtpunktet på AB er

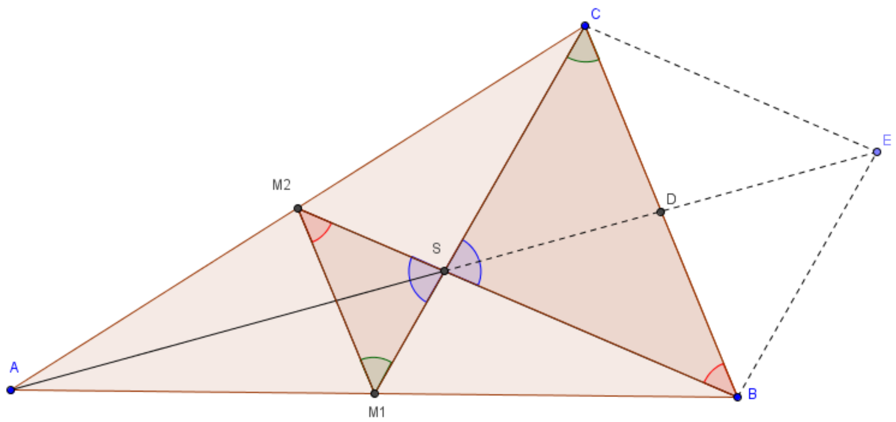
$$\frac{AM_1}{AB} = \frac{1}{2}$$

Siden S er midtpunktet på AE er

$$\frac{AS}{AE} = \frac{1}{2}$$

Vi har også at $\angle SAM_1 = \angle EAB$. Dermed har vi at forholdet mellom to par av samsvarende sider i de to trekantene er like, og at vinkelen mellom disse er lik. Dermed er $\Delta ASM_1 \sim \Delta AEB$ Da vet vi at $EB \parallel SM_1$, og følgelig er $EB \parallel CS$. Siden $EC \parallel BS$ og $EB \parallel CS$, så er $BECS$ et parallellogram.

Vi har tidligere vist at diagonalene i et parallellogram skjærer hverandre i midtpunktet på begge diagonalene. Diagonalene i parallellogrammet $BECS$ skjærer hverandre i punktet D. Det vil si at D er midtpunktet på CB. AD går altså fra midtpunktet på CB til hjørnet A. Dermed er AD medianen fra CD til A, og siden vi konstruerte denne slik at den gikk gjennom skjæringspunktet S har vi at alle medianene går gjennom S, og skjærer hverandre i ett punkt. Dette punktet kalles tyngdepunktet. Tyngdepunktet vil alltid ligge inne i trekanten.



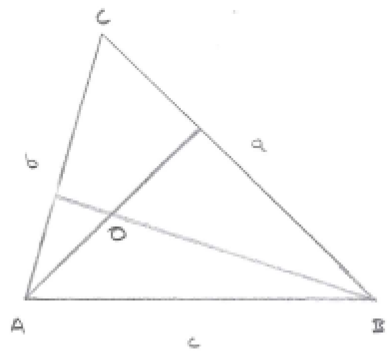
Figur 19: ΔABC med AS og forlengelsen SE slik at $SE = AS$

Det kan være verdt å merke seg at tyngdepunktet deler hver median i forholdet $1 : 2$. Siden $AS = SE$ og $SD = DE$, er $DS/SA = 1/2$. For å vise det samme for de andre medianene må vi se på to de to trekantene $\triangle M_1M_2S$ og $\triangle CBS$. M_1 og M_2 er midtpunktene på henholdsvis AB og AC. Fra midtsegmentteoremet vet vi derfor at linja fra M_2 til M_1 er parallell med CB. Derfor er $\angle M_1M_2S$ og $\angle CBS$ samsvarende vinkler ved parallelle linjer, og dermed like. Siden $\angle M_2SM_1$ og $\angle BSC$ er toppvinkler er de like. Fra formlike trekanter vet vi at siden de har to samsvarende vinkler må trekantene være formlike. Midtsegmentteoremet forteller oss at forholdet mellom linja fra M_2 til M_1 og BC er $1 : 2$. Forholdet mellom $\angle M_2M_1S$ og trekant $\angle BCS$ er dermed $1 : 2$, og følgelig vet vi at skjæringspunktet S deler medianene i forholdet $1 : 2$.

6 Høydene

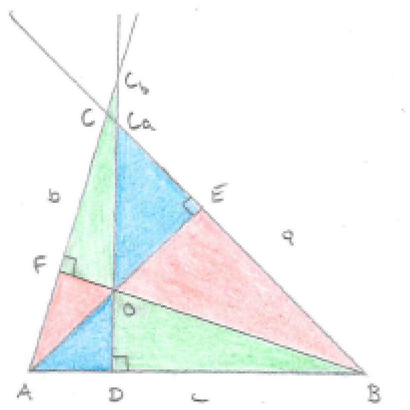
6.1 Bevis 1

I denne delen vil vi vise at dersom vi konstruerer de tre høydene til trekanten, vil disse skjære hverandre i ett punkt. For å vise dette tar vi utganspunkt i to høyder, og skjæringspunktet mellom disse. Siden høydene til en trekant ikke kan være parallelle vet vi at de må skjære hverandre i ett punkt. Vi kaller dette skjæringspunktet for O.



Figur 20: ΔABC

Vi forlenger sidene a og b, og konstruerer en normal fra punktet O ned til siden c, vi forlenger så denne til den skjærer linjene a og b. Vi antar at C_b skjærer linjen b, og at C_a skjærer linjen a, og at disse punktene er ulike.



Figur 21: ΔABC

Fra tegningen ser vi at det finnes sett med formlike trekanter. Disse settene med trekanter har alle en $\angle 90°$, i tillegg til at de deler en toppvinkel. Fra definisjonen til formlike trekanter må de derfor være formlike.

$$\Delta C_b FO = \Delta DOB$$
$$\Delta C_a OE = \Delta ADO$$
$$\Delta FAO = \Delta OEB$$

Ut fra dette kan vi sette opp forholdstallene mellom disse:

$$\frac{OA}{OF} = \frac{OB}{OE} \tag{1}$$

$$\frac{OA}{OD} = \frac{OC_a}{OE} \tag{2}$$

$$\frac{OC_b}{OF} = \frac{OB}{OD} \tag{3}$$

Dersom vi nå finner et uttrykk for OA fra ligning (1) og setter dette inn i ligning (2) får vi

$$OA = \frac{OB \cdot OF}{OE} \rightarrow \frac{OB \cdot OF}{OE \cdot OD} = \frac{OC_a}{OE} \rightarrow \frac{OB}{OD} = \frac{OC_a}{OF}$$

Dette kan vi bruke til å finne et uttrykk for OB, og sette inn i ligning (3)

$$OB = \frac{OC_a \cdot OD}{OF} \rightarrow \frac{OC_b}{OF} = \frac{OC_a \cdot OD}{OF \cdot OD} \rightarrow OC_b = OC_a$$

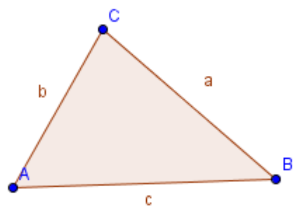
Fra utregningen over ser vi at $OC_a = OC_b$. Dette forteller oss at a og b skjærer hverandre på normalen til linje c, som vi konstruerte fra punket O. Siden C_b skal skjære linje b og C_a skal skjære linje a, vil vi ha at $C = C_a = C_b$.

Da har vi vist at alle høydene i en trekant skjærer hverandre i det samme punktet O. Dette punktet kaller vi ortosenter.

6.2 Bevis 2

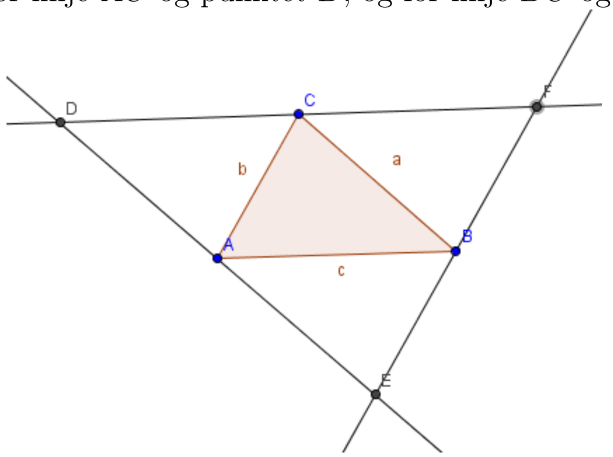
Beviset over egner seg ikke til å gjennomføres i GeoGebra, da vi antar en feil konstruksjon. Derfor skal vi nå vise et annet bevis, der vi antar at vi allerede vet at midtnormalene skjærer hverandre. Det er derfor viktig at man har gjennomført det beviset på forhånd for å kunne bruke dette resultatet.

Det første vi gjør er som vanlig å velge oss en tilfeldig trekant ABC, som under.



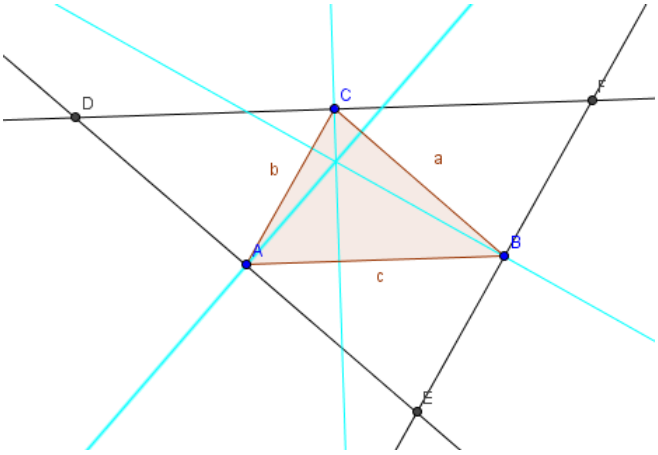
Figur 22: ΔABC

Fra denne figuren konstruerer vi en linje som er parallell med AB, som går igjennom punktet C. Tilsvarende gjør vi for linje AC og punktet B, og for linje BC og punktet A.



Figur 23: ΔABC

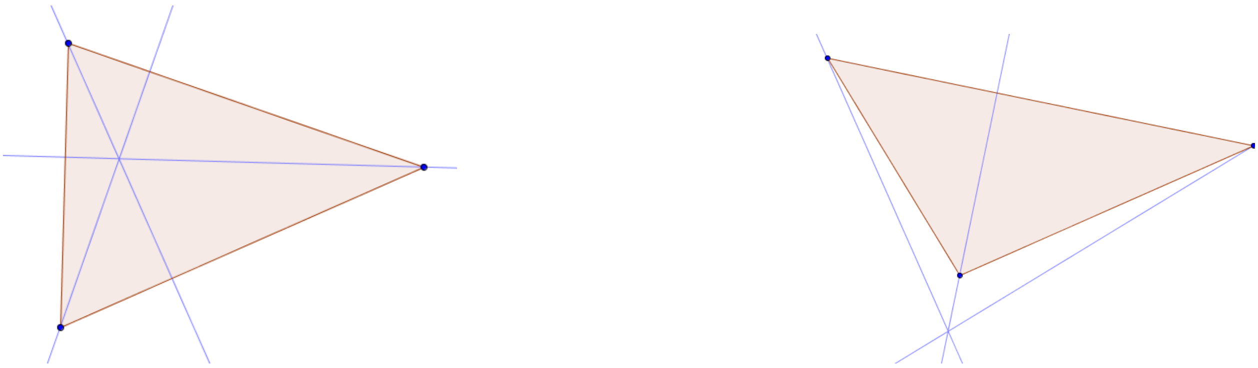
Fra figur 23 har vi da at $ABCD$ er et parallellogram, og at firkanten $ABFC$ også er et parallellogram. Dette forteller oss at $DC = AB$ og $AB = CF$, så $DC = CF$. Da vet vi at punktet C ligger på midtpunktet til linja DF. Ved tilsvarende argumentasjon vet vi at punktet B er midtpunktet til linja FE, og at A er midtpunktet til linja DE. Dersom vi nå konstruerer høydene til ABC vil dette være det samme som midtnormalene til DEF. Siden vi allerede har bevist at midtnormalene til en trekant skjærer hverandre i ett punkt, må derfor også høydene til en trekant skjære hverandre i ett punkt.



Figur 24: ΔABC

Det er verdt å merke seg at dette beviset også viser at ortosenteret i $\triangle ABC$ tilsvarer omsenteret til $\triangle DEF$.

Det finnes flere forskjellige metoder for å bevise at høydene til en trekant skjærer hverandre i ett og samme punkt, men vi har tatt med disse to, som vi syntes er mest forståelige. Dersom man vil ha et raskere og mer intuitivt bevis, som ikke nødvendigvis er like rigorøst, er GeoGebra et fint hjelpemiddel til å vise dette. Måten man gjør det på er å konstruere en vilkårlig trekant, og konstruere høydene til denne. Når det er gjort kan man dra i et av hjørnene, slik at trekanten forandrer seg.



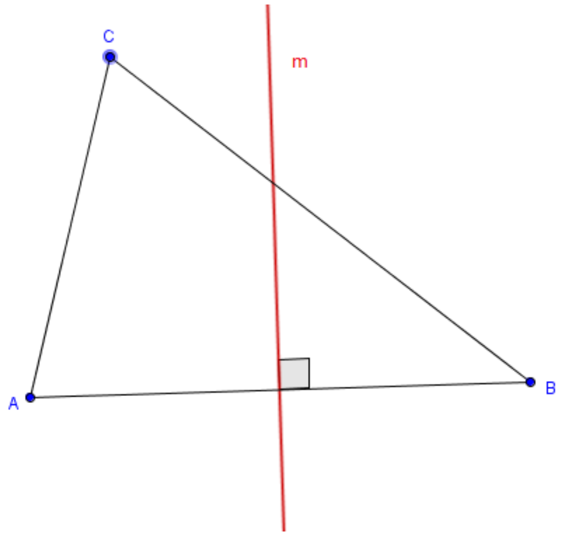
(a) ΔABC (b) ΔABC

Figur 25: To vilkårlige trekanter

Som vi ser av figur 25 vil høydene skjære hverandre uavhengig av hvordan trekanten ser ut. Det er nyttig å være klar over at ortosenteret kan falle utenfor selve trekanten. Dette skjer dersom en av vinklene i trekanten er stump, altså større enn 90°.

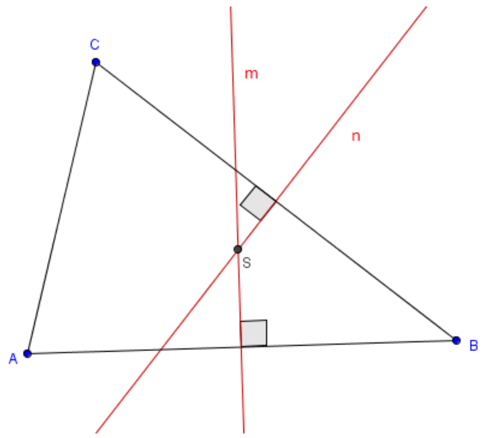
7 Midtnormalene og omskrevet sirkel

En midtnormal er et geometrisk sted som består av alle punktene som ligger like langt fra begge endepunktene til linjestykket. Vi vil nå vise at midtnormalene til en trekant vil skjære hverandre i ett punkt. Vi lar ΔABC være en vilkårlig trekant. Vi konstruerer midtnormalen til AB, og kaller denne m.



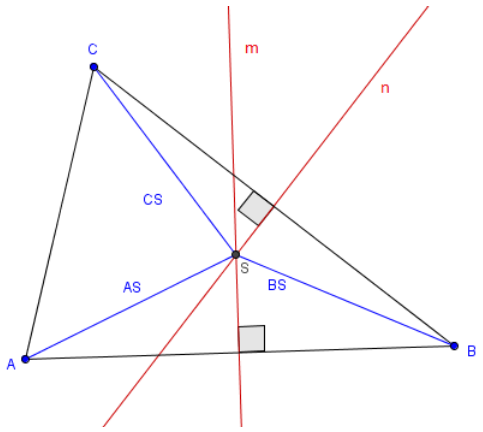
Figur 26: ΔABC

Deretter konstruerer vi midtnormalen til BC, som vi kaller n. Siden AB og BC ikke er parallelle, er heller ikke m og n parallelle. m og n må derfor skjære hverandre i et punkt. Vi kaller dette skjæringspunktet S.



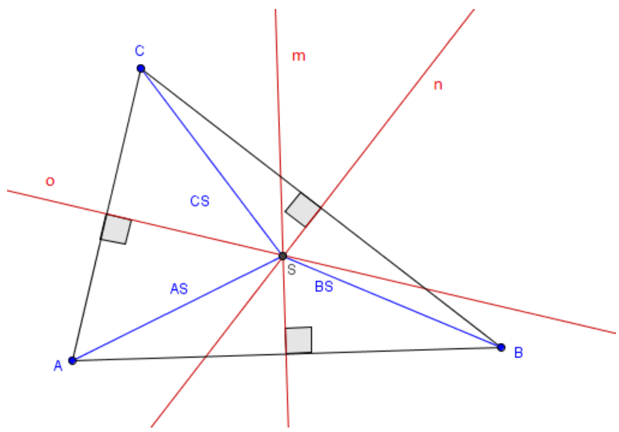
Figur 27: ΔABC

Siden S ligger på midtnormalene vet vi at A og B ligger like langt fra punktet S. Dermed er linjestykket $AS = BS$. Tilsvarende ligger B og C like langt fra punktet S, og $BS = CS$.



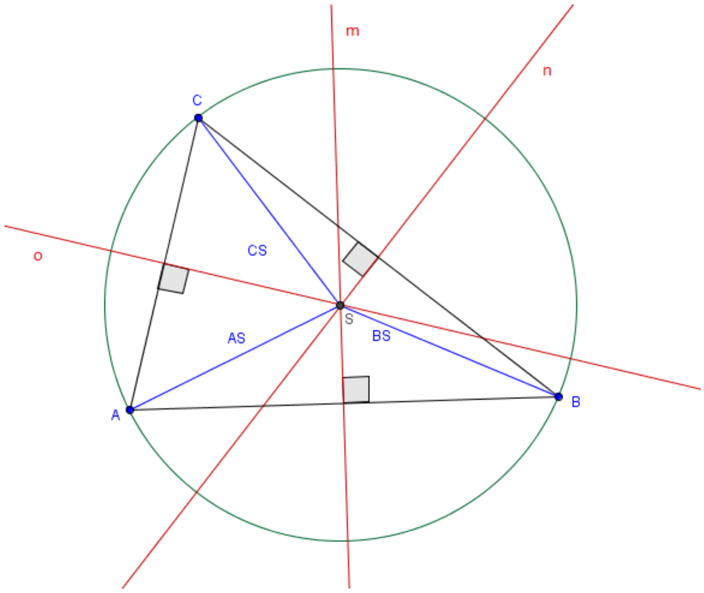
Figur 28: ΔABC

Da har vi at $AS = BS = CS$. Altså er $AS = CS$. Det betyr at S ligger like langt fra C som fra A, og dermed ligger S på midtnormalen til AC.



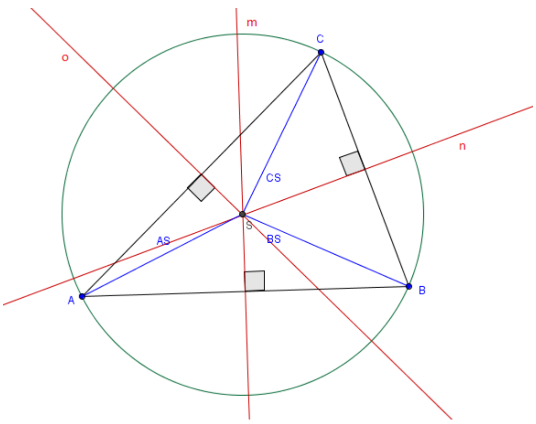
Figur 29: ΔABC

Dermed har vi bevist at de tre midtnormalene m, n, og o skjærer hverandre i et punkt, som kalles omsenter.

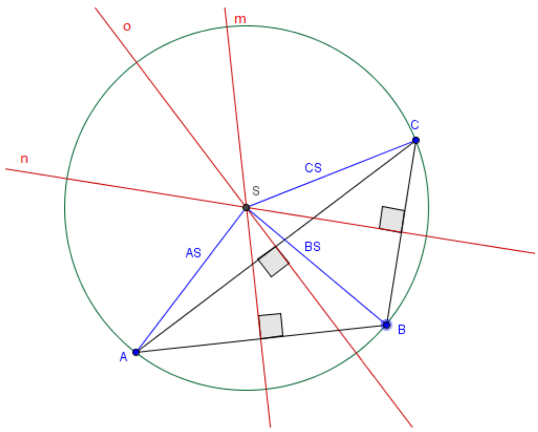


Figur 30: ΔABC

Dette punktet er sentrum for trekantens omskrevne sirkel. For denne sirkelen har vi altså: $r = AS = BS = CS$. Sirkelen vil derfor gå gjenom alle hjørnene til trekanten. For å demonstrere at denne skjæringssetningen for midtnormalene i en trekant gjelder for alle vilkårlige trekanter, kan en benytte seg videre av GeoGebra. Ved å dra i hjørnene til trekantene i GeoGebra kan en endre på trekanten og la elevene se at alle midtnormalene fortsatt skjærer hverandre i ett punkt, og at dette skjæringspunktet fortsatt er sentrum for den omskrevne sirkelen. Det kan være lurt å også vise elevene tilfeller der sentrum til den omskrevne sirkelen ligger utenfor trekanten, slik at de ser at dette også er mulig. Dette skjer dersom en av vinklene i trekanten er stump.



(a) ΔABC



(b) ΔABC

Figur 31: To vilkårlige trekanter

Figur 31 viser eksempler på trekanter som har kommet frem ved å endre på den opprinnelige trekanten vi lagde i Geogebra, og som demonstrerer holdbarheten til skjæringssetningen for midtnormalene.

8 Sammenheng mellom median, midtnormal og høyde

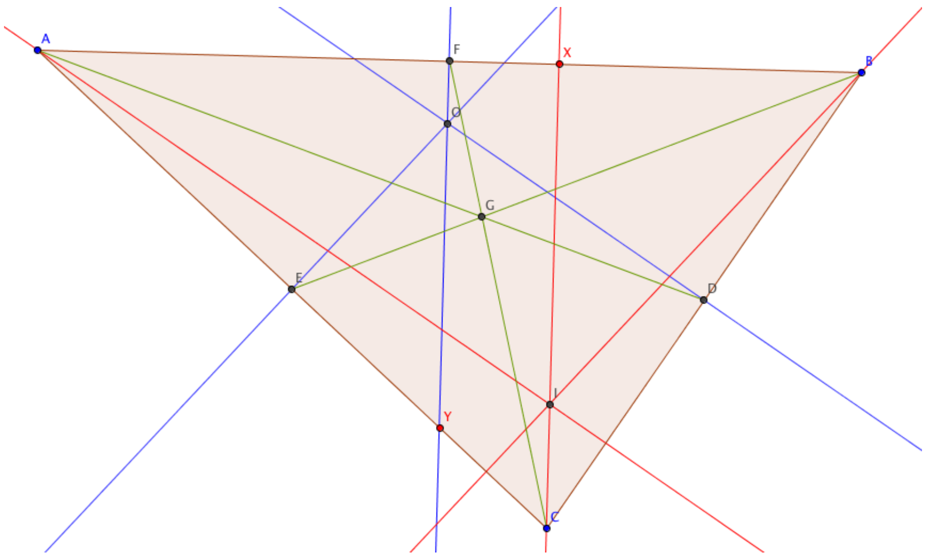
Vi skal nå se nærmere på sammenhengen mellom skjæringspunktene til midtnormalene, høydene og medianene

8.1 Eulerlinjen

Eulerlinjen er en rett linje som går gjennom ortosenteret, omsenteret og tyngdepunktet til en trekant som ikke er likesidet. Har vi en likesidet trekant, vil ortosenteret, omsenteret, tyngdepunktet og innsenteret sammenfalle, og vi får kun ett punkt. Er trekanten likebeint, vil innsenteret også ligge på Eulerlinjen.

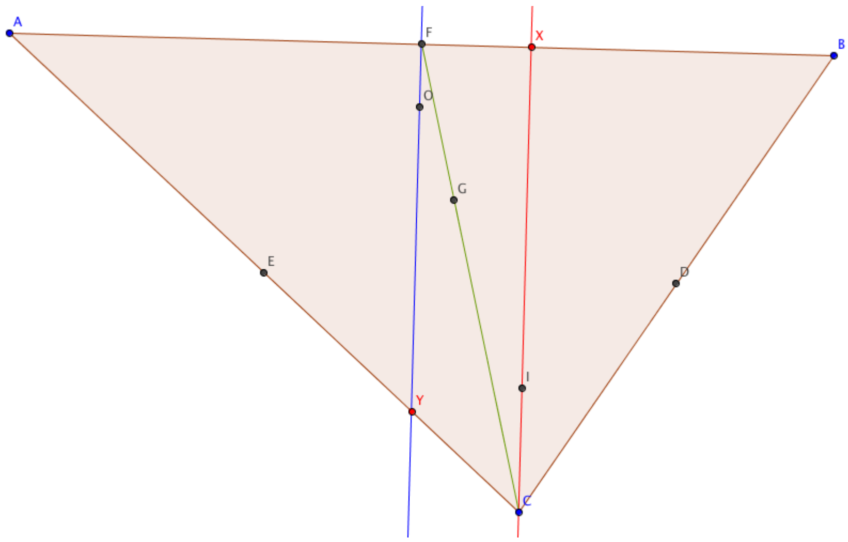
Vi vil nå bevise at Eulerlinjen er en rett linje som går gjennom ortosenteret, omsenteret og tyngdepunktet i en trekant.

Bevis:
Vi lager oss en vilkårlig trekant $\triangle ABC$ som ikke er likebeint. La D, E og F være midtpunktene på linjestykkene BC, AC og AB. Vi konstruerer midtnormalene til $\triangle ABC$ og kaller omsenteret for O. Videre konstruerer vi medianene til $\triangle ABC$, og får tyngdepunktet G. Ved å konstruere høydene i $\triangle ABC$ får vi trekantens ortosenter, og kaller det for I.



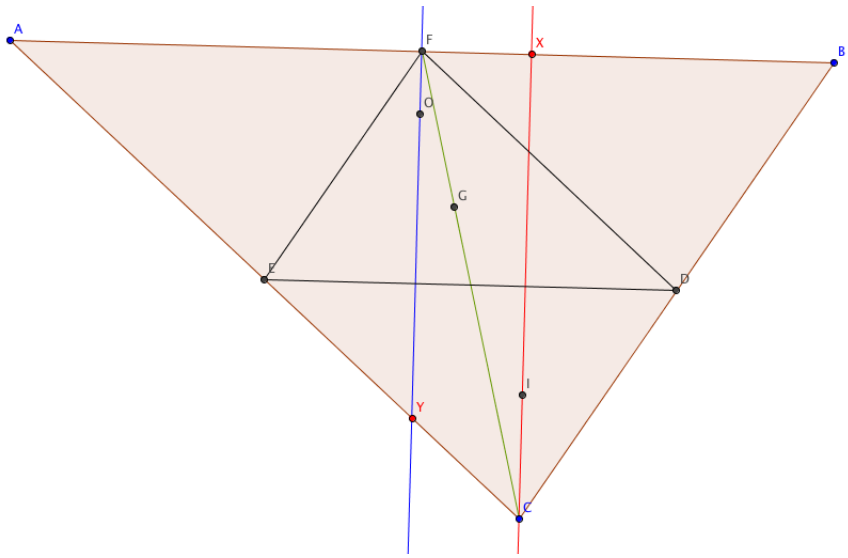
Figur 32: Midtnormaler, medianer og høyder

For å forenkle figuren beholder vi kun høyden, midtnormalen og medianen fra linjestykket AB, og da får vi en figur som vist under.



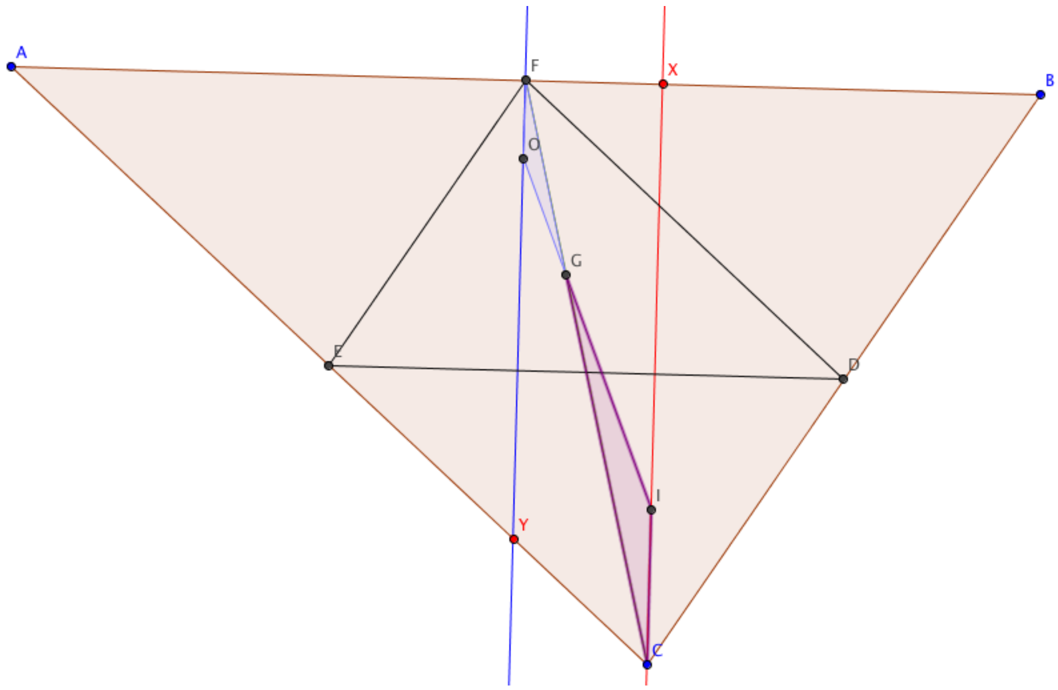
Figur 33: Midtnormal, median og høyde

Vi kan trekke linjer mellom midtpunktene, og vi får da en trekant $\triangle DEF$. Vi vet og at O da vil være ortosenteret i $\triangle DEF$ (som vist i det ene beviset om høydene i trekanter).



Figur 34: Trekant fra midtnormalene

Fra midtsegmentteoremet vet vi at forholdet mellom sidene i $\triangle DEF$ og $\triangle ABC$ er $1 : 2$. Dette vil stå sentralt i beviset. Når to trekanter er formlike med et fast forholdstall betyr det at alle korresponderende sider mellom de to trekantene vil ha det samme forholdstallet. I dette tilfellet er forholdstallet som sagt $1/2$. For å vise at O, G og I ligger på en rett linje holder det å vise at $\triangle FOG$ er formlik med $\triangle CIG$.



Figur 35: Formlikhet

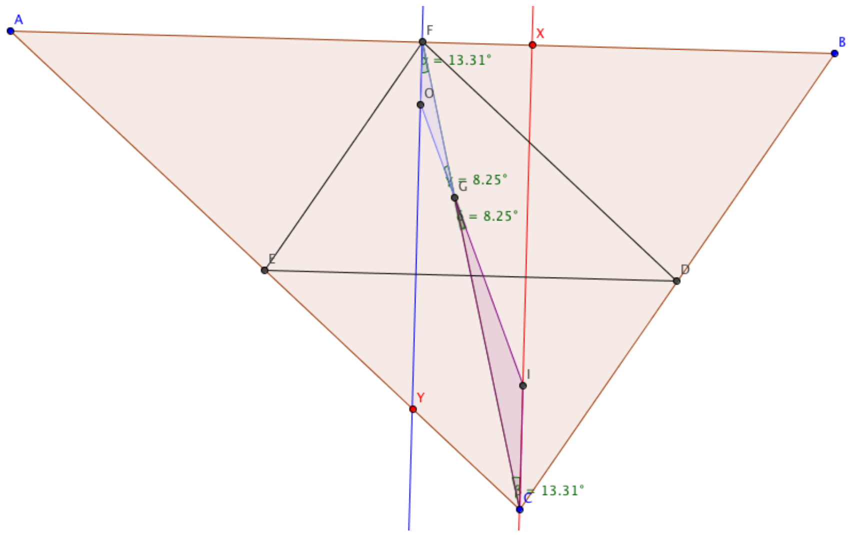
Vi vet at $XC \perp AB$ og at $FY \perp AB$, altså må $FY \parallel XC$. Videre vet vi at FC er medianen i $\triangle ABC$, og dermed en rett linje som skjærer både FY og XC. Siden vinkel $\angle OFG$ og $\angle ICG$ er samsvarende vinkler ved parallelle linjer vet vi at $\angle OFG = \angle ICG$.

Vi vet også at tyngdepunktet deler hver av medianene inn i to linjestykker som har forholdet $2:1$. Da vet vi at $CG = 2GF$.

Videre vet vi at linje CI er avstanden mellom det ene hjørnet i $\triangle ABC$ og trekantens ortosenter. Tilsvarende vet vi at linjen FO er avstanden mellom det ene hjørnet i $\triangle DEF$ og trekantens ortosenter. Vi vet allerede at forholdet mellom $\triangle ABC$ og $\triangle DEF$ er $2:1$. Det samme forholdet gjelder også for de korresponderende linjene CI og FO. Vi vet nå at $\triangle FOG$ og $\triangle CIG$ har to korresponderende sider med samme forholdstall, i tillegg til at den mellomliggende vinkelen i de to trekantene er lik. Vi vet at:

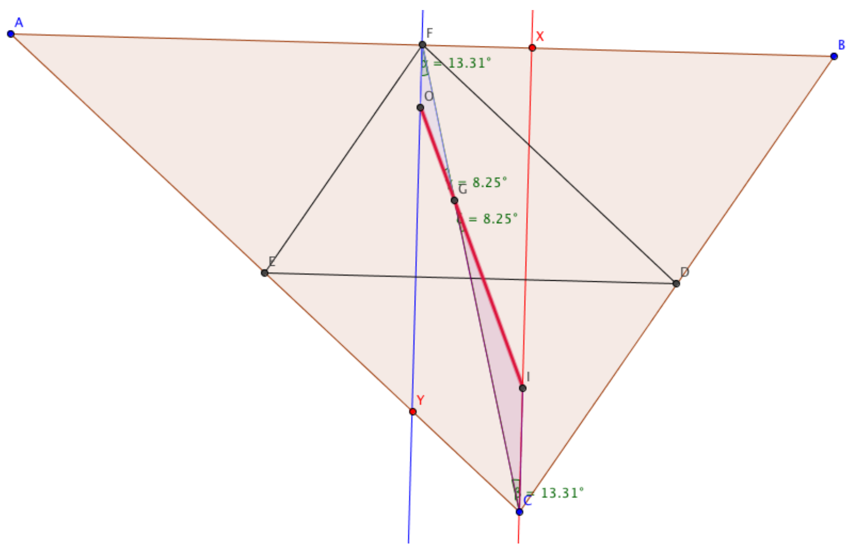
$$CG = 2GF$$
$$\angle OFG = \angle ICG$$
$$CI = 2FO$$

Trekantene er altså formlike da de oppfyller kravet for side-vinkel-side-formlihet. Da vil de korresponderende vinklene i trekantene være like. Altså vil $\angle FOC = \angle CIG$, i og med at $FY \parallel XC$.



Figur 36: Like vinkler

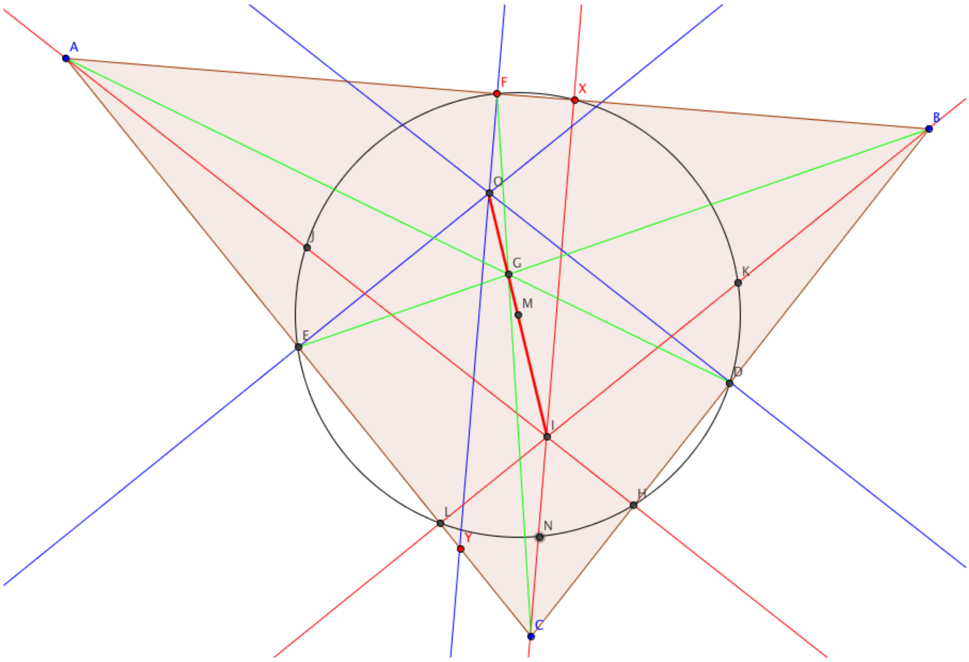
Vi ser og at toppvinklene til G, $\angle FGO$ og $\angle CGI$, må være like hvis trekantene er formlike. Vi vet at FC er en rett linje, og toppvinklene er kun like dersom de ligger mellom to rette linjer. Ut ifra betingelsene for toppvinkler vet vi derfor at linjen gjennom O, G og I er en rett linje.



Figur 37: Eulerlinjen

8.2 Nipunktssirkelen

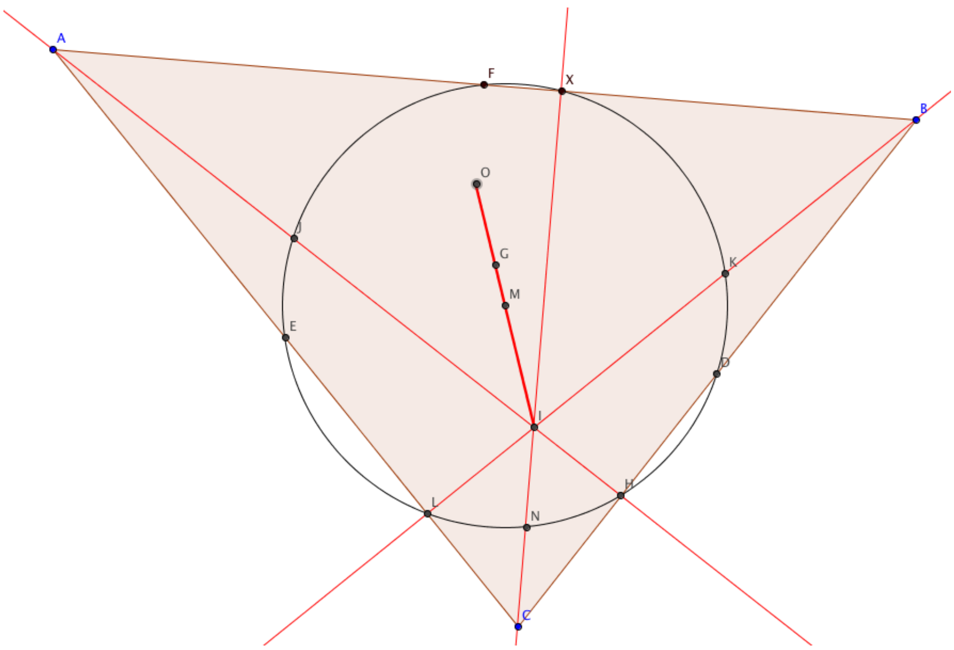
Eulerlinjen gir grunnlaget for en utvidet sammenheng mellom høyde, median og midtnormal for trekanter. Vi kan markere midtpunktet mellom ortosenteret og omsenteret på Eulerlinjen. Dette punktet, som vi kan kalle M, er sentrum i en sirkel som skjærer trekanten i ni ulike punkter.



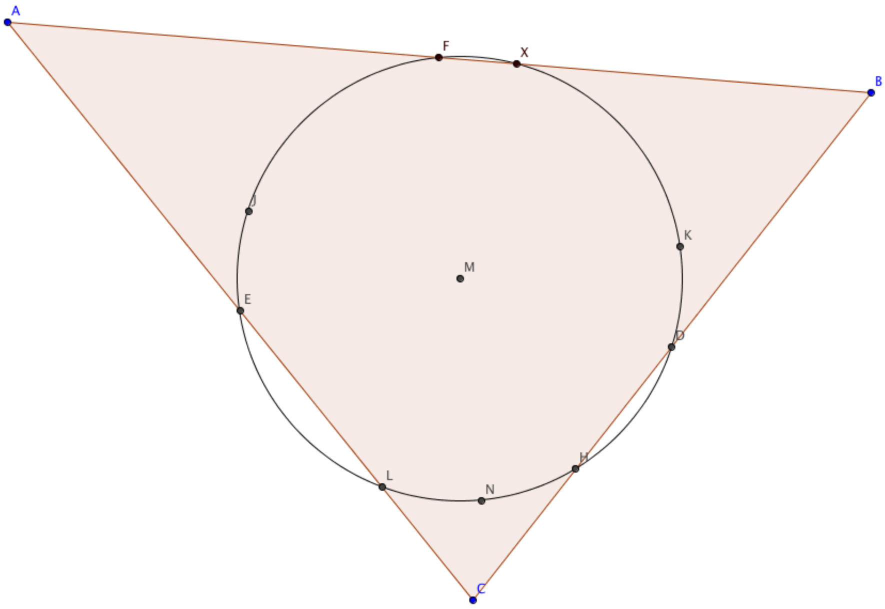
Figur 38: Nipunktssirkel med høyder, medianer, midtnormaler og Eulerlinjen

M er altså sentrum i det som kalles nipunktssirkelen til en trekant. De ni punktene er;

- Midtpunktene på hver side i trekanten
- Punktene der høydene treffer sidekantene
- På hver av de tre høydene; midtpunktet mellom hjørnene i trekantene og ortosenteret.



Figur 39: Nipunktssirkel med Eulerlinje og høyder



Figur 40: Nipunktssirkel