Skoleprosjekt Algebra Mat4010

Narve Elling Johnsen

27. mars 2014

Innhold

1 Annengradsligninger

Vi sier ofte at annengrads ligninger har enten to, en eller ingen reelle løsninger. Vi kan bruke abc formelen til å forklare dette.

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Vi kan se på uttrykket inne i rottegnet og finne ut hvor mange løsninger vi har.

$b^2 - 4ac > 0 \Longrightarrow$to løsninger
$b^2 - 4ac = 0 \Longrightarrow$en løsning
$b^2 - 4ac < 0 \Longrightarrow$ ingen løsninger

Dette kan vi enkelt se ved å sette inn verdier i uttrykket. Dette er kanskje en god nok forklaring i klasserommet på videregående, men det er ikke hele sanheten. Det vi har listet opp over er kun de reelle løsningene. Nå vil vi også inkludere de imaginære løsningene.

$b^2 - 4ac < 0 \Longrightarrow$ to imaginære løsninger.

Når vi rgener med imaginære tal godtar vi å ta røtter av negative tal. Vi skriver:

$$\sqrt{-1} = i$$

1.1 Komplekskonjungerte imaginære røtter

Når vi løser en ligning hvor $b^2 - 4ac < 0$ får vi to imaginære løsninger som er konjugerte av hverandre. Disse løsningene har en realdel (a) og en imaginærdel (bi).

$$x = a + bi$$

Hvis $b = 0$ har vi at $x = a$ og tallet er et reelt tall.
Tallene $a + bi$ og $a - bi$ er det vi kaller komplekskonjugerte. Det innebærer at de har like realdeler og imaginærdel med motsatte fortegn. Dette ser man lett fra denne omformuleringen av abc-formelen:

$$z = \frac{-b \pm i\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Her er faktoren $i = \sqrt{-1}$ trukket ut av kvadratroten slik at det som er igjen er positivt.

$$z_1 = \frac{-b}{2a} - \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} i$$

$$z_2 = \frac{-b}{2a} + \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} i$$

Nå kan vi enkelt se at z_1 og z_2 er komplekskonjugerte.
Vi kan også se på dette andre veien. Hvis vi multipliserer sammen røttene $x - z_1$ og $x - z_2$ får vi følgende utregning:

$$(x - (a + bi)) * (x - (a - bi))$$

$$= x^2 - x(a - bi) - x(a + bi) + (a + bi)(a - bi)$$
$$= x^2 - xa + xbi - xa - xbi + a^2 - abi + abi - b^2i^2$$
$$= x^2 - 2xa + a^2 + b^2$$

Vi vet at a og b er konstanter. Resultatet er derfor et reelt annengradspolynom.

1.2 Gjennom historien

Det er lenge siden man begynte å løse annengradsligninger. Vi vet at så tidlig som hos babylonerne løste man noen oppgaver av denne typen, men fordi matematikken var retorisk, og algebra ikke var godt utviklet begrenset dette seg til noen helt bestemte varianter av annengradsligninger. Vi skriver jo ligningene helst på formen

$$ax^2 + bx + c = 0$$

Fordi matematikk var så sterkt knyttet til konkrete regnoppgaver og konkreter var tanken om at tre ledd tilsammen skulle bli lik 0 en meningsløs tanke. Så vidt vi vet løste babylonerne bare annengradsligninger på disse formene

$$x^2 - ax = b$$

$$x^2 + ax = b$$

Gresk matematikk og ligningsløsning var overveiende geometrisk. De skillte strengt mellom tall som representerte et linjestykke og tall som representerte et areal. Denne tenkemåten begrenset ligningsløsningen ved at negative tall og null ikke ble godtatt og heller ikke irasjonale tall. Som hos babylonerne hadde de derfor noen spesialtilfeller av ligninger som de behandlet geometrisk.

$$x^2 - ax = b^2$$

$$x^2 + ax = b^2$$

$$ax - x^2 = b^2$$

Konstantleddet er her skrevet som b^2 , fordi grekerne så på dette som et plantall, altså et tall som betegnet et areal. Den tredje ligningen kjenner vi ikke fra babylonerne.

I arabisk matematikk utviklet algebraen seg og sprengte nye grenser. Man åpnet for å bruke irrasjonale tall og null ble etter hvert tatt i bruk. Minst like viktig var arbeidet med å lage regler for hvordan man regner med ligninger. Dette førte til at araberne tok for seg alle typer annengradsligninger og løste disse. Negative løsninger var fortsatt ikke godtatt.

2 Ligninger av høyere grad

Etter at alle annengradsligningerr var løst på femtenhundre-tallet, gikk fokuset naturlig vider til tredjegradsligninger. Noen former for tredjegradsligninger ble etter hvert løst. Cardano fikk fatt i disse løsningsmetodene og brukte dette for å behandle alle typer tredjegradsligninger. Han utgav alle disse løsningsformlene sammen med en metode som tilbakefører fjerdegradsligninger til ligninger av tredje grad i det kjetne verket *Ars Magna*.

2.1 Oppdagelsen av imagiære tall

Cardanos formel for løsning av ligninger på formen $x^3-px-q=0$ er følgende:

$$x = \sqrt[3]{\sqrt{-\left(\frac{p}{3}\right)^3+\left(\frac{q}{2}\right)^2}+\frac{q}{2}} - \sqrt[3]{\sqrt{-\left(\frac{p}{3}\right)^3+\left(\frac{q}{2}\right)^2}-\frac{q}{2}}$$

Denne formelen fungerer utmerket for mange ligninger, men hvis vi prøver med $x^3-15x-4=0$ får vi et problem. Ved innsetning kan vi se at $x=4$ er en løsning, men hvis vi bruker cardanos formel er det ikke like enkelt.

$$x = \sqrt[3]{\sqrt{-\left(\frac{15}{3}\right)^3+\left(\frac{4}{2}\right)^2}+\frac{4}{2}} - \sqrt[3]{\sqrt{-\left(\frac{15}{3}\right)^3+\left(\frac{4}{2}\right)^2}-\frac{4}{2}}$$

$$x = \sqrt[3]{\sqrt{-125+4}+2} - \sqrt[3]{\sqrt{-125+4}-2}$$

$$x = \sqrt[3]{\sqrt{-121}+2} - \sqrt[3]{\sqrt{-121}-2}$$

For Cardano og hans samtidige var $\sqrt{-121}$ et helt umulig tall. Slike tall kunne man ikke stole på, og ikke regne med. Dette levde man godt med lenge. I deres øyne var det faktum at ikke alle ligninger kunne løses ikke noe problem. For andregradsligninger har imaginære røtter ingen klar funksjon. I ligningen over og andre tredjegradsligninger derimot kan vi ved innsetningsmetoden altid finnne en rell løsning, alle tredjegradsligninger har nemlig minst en reel rot. Denne løsningen kan ikke nødvendigvis finnes uten å regne med imaginære tall. Ved å regne videre som om kvadratrøtter av negative tall fantes, viste Bombelli at

$$\sqrt[3]{\sqrt{-121}+2} = \sqrt{-1}+2$$

og

$$\sqrt[3]{\sqrt{-121}-2} = \sqrt{-1}-2$$

Ved å sette dette inn i problemet over får vi

$$x = \sqrt[3]{\sqrt{-121}+2} - \sqrt[3]{\sqrt{-121}-2}$$

$$x = (\sqrt{-1}+2) - (\sqrt{-1}-2) = 2 - -2 = 4$$

Dette og lignende resultater gjorde at flere begynte å regne med imaginærtall og gjorde at komplekse tall etter hvert ble godtatt på linje med de reele tallene.

3 Synkopert algebra

For å skrive matematikk og spessielt algebra bruker vi diverse notasjoner. Vi skriver i et slags symbolspråk, med varibler og symboler. Dette gjør oss i stand til å tenke abstrakt rundt problemene. I algebraens begynnelse hadde man ikke disse symbolene. Man skrev problemene ut som hele setninger noe som blir ganske så tungvindt i lengden. Mange regnestykker følger lignende oppsett, og noen ord blir ofte gjentatt. Det utviklet seg etter hvert en type algebraisk skriftspråk som man kan se på som en blanding av setninger, forkortelser og etter hvert symboler. Dette kalles synkopert algebra.

Den greske matematikeren Diofantos var en av de første som gikk utover det å bruke forkortelser og begynnte å skrive matematikk delvis med symboler. Han begynte å bruke symboler for en ukjent størelse, slik som vi i dag kunne brukt x. Andre symboler lot vente på seg, men utover femten og seksten hundre-tallet startet man å bruke flere og flere symboler. François Viète innførte bruken av bokstaver, for både ukjente og kjente størrelser. Han brukte også mange av de symbolene vi bruker i dag. For uttrykket

$$5BA^2 - 2CA + A^3 = D$$

ville han ha skrevet

$$B\ 5in\ A\ quad - C\ plano\ 2\ in\ A + A\ cub\ aequatur\ D\ solido$$

Her bruker han både $-$ og $+$ slik vi gjør i dag. Like vel var det stor variasjon i hva hver enkelt matematiker brukte av syboler, og det fantes ofte mange variatner av samme sybol i bruk samtidig. For eksempel brukte man tre forskjellige symboler for adisjon $+, \cdot$ og X. Etter hvert samlet man seg rundt $+$ og nå bruker alle dette tegnet. Noen syboler er det fortsatt ikke enighet om. Et eksempel er $\div$, som kan brukes både som tegn for subtraskjson og divisjon. Et annet eksempel er de forskjellige konvensjonene rundt hvordan man skriver desimaltall. Dette er etterlevninger etter symbolforvirringen som var på denne tiden.

Etter hvert nærmet den synkoperte skrivemåten seg mer og mer slik vi skriver i dag. et eksempel er Descates som skrev denne fjerdegradsligningen:

$$x^4 - -4x^3 - -19xx + 106x - -120 \propto 0$$

Den symbolske algebraen førte til at den generelle løsningen for annengradsligninger som vi bruker i dag kunne bevises.

4 Algebraens fundamentalteorem

Ut over sekstenhundre-tallet var det flere matematikere som utforsker det vi nå kaller algebraens fundamentalteorem. Albert Girard og andre hevdet at et hvert n-te grads polynom har n mulige eller såkalt umulige (det vil si komplekse) røtter. Det utviklet seg etter hvert mange indisier på at dette stemte. Like vel tok det lang tid før det ble endelig bevist. I 1799 klarte Carl Friedrich Gauss å vise nettop dette.
Algebraens fundamentalteorem:

$$P(z) = c_n z^n + c_{n-1} z^{n-1} + c_{n-2} z^{n-2} + ...c_1 z + c_0$$

er et komplekst n-te grads polynom. Da finnes det komplekset tall $r_1, r_2, ..., r_n$ slik at

$$P(z) = c_n(z - r_1)(z - r_2)...(z - r_n)$$

for alle komplekse tall.
Legg merke til at løsningene $r_1 - r_n$ ikke nødvendigvis er forskjellige. Når vi da sier at et n-te grads polynom har n røtter, kan to eller flere av disse røttene være like. Vi sier at vi teller røttene med mutiplisitet.

4.1 Litt om variabelskifte og om Abel

I utledningen av annengradsformelen skjer det et variabelskifte når vi fullfører kvadratet, og ender etter hvert opp med en ligning av første grad. På samme måte er løsningen av tredjegradsligningen og fjerdegradsligningen metoder for å få ligninger av en lavere grad. Dette gjøres ved å velge gode substitusjoner som fører til det som kalles et variabelskifte. Nå som Gauss har bevist at et hvert n-te grads polynom har n reelle eller komplekse røtter, kunne vi jo håpe at disse lett skulle kunne finnes ved å stadig redusere graden på ligningene. Det ble gjort forsøk på å finne generelle metoder for å løse ligninger på denne måten, men ikke noen vellykkede. Dette viste seg å ha en logisk forklaring.

I 1823 trodde den norske matematikeren Niels Henrik Abel at han hadde klart å finne den generelle løsningen av femtegradsligningen. Dette beviset viste seg etter kort tid å ha en feil og før noen kunne påpeke dette, fant Abel i stede et bevis for det motsatte, nemlig at det ikke er mulig å finne en generell algebraisk løsningsformel for femtegradsligningen. Algebraens fundamentalteorem forteller oss at alle femtegradsligninger har fem løsninger. Det finnes mage metoder for å finne disse løsningene, for eksempel numeriske metoder. Det Abel viste var at det ikke er mulig å finne en enkel løsningsformel hvor man putter in verdier for koeffisiene og finner løsningen. En slik formel er umulig.

5 Referanseliste

Lindstrøm, Tom. (2006). Kalkulus(3.utg)(s-107-150). Oslo. Universitetsforlaget.
Onstad, Torgeir. (1994). Fra Babel til Abel. Oslo. NKS-Forlaget.
Sanford, Vera. (1930). A short history of mathematics. Cambridge Massachusetts. The riverside press.