Skoleprosjekt i MAT4010: Derivasjon

Marie Vaksvik Draagen, Anne Line Kjærgård og Cecilie Anine Thorsen

20. mars 2014

Innhold

1 Introduksjon

1.1 Oppgavebeskrivelse

I denne oppgaven tar vi for oss temaet derivasjon, og ser på ulike sider ved derivasjon det er lurt å ha kjennskap til i undervisningssituasjoner i den videregående skolen.

Vi starter med et kort historisk overblikk over derivasjon, og hvilke kompetansemål rettet mot derivasjon de ulike læreplanene i matematikkfagene inkluderer. Videre ser vi på en mulige måter å introdusere elever for derivasjon på en motiverende og relevant måte, blant annet ved hjelp av geogebra.

I skolen skal man introdusere elever for bevis. Vi har derfor tatt med bevisene for de ulike regnereglene i derivasjon, men vi forutsetter noen ekstra antagelser for beviset av kjerneregelen for å gjøre det mer "brukervennlig".

Sentralt i noen matematikkfag står også derivasjon av trigonometriske funksjoner. Her kommer det enda flere regneregler inn. Særlig viktig er den deriverte av $\sin x$, og da $\lim_{x\to 0} \sin(x)/x$, som er "kjernen" i beviset for $(\sin(x))' = \cos(x)$. $\lim_{x\to 0} \sin(x)/x$ er en av de viktigste ikke-trivielle grensene i matematikkundervisningen i videregående skole. Den grenseverdien er det viktig at elevene kan og forstår, så vi vil presentere ulike måter å bevise og vise denne på. Vi vil videre bruke denne grenseverdien til å bevise $(\sin(x))' = \cos(x)$.

Det finnes også flere funksjoner det er viktig å være klar over når man skal undervise i derivasjon; man kan si at de er vanskelige funksjoner. Vi vil ta for oss noen av disse funksjonene, samt se på noen oscillerende funksjoner og deres egenskaper når det gjelder kontinuitet, deriverbarhet og kontinuerlig deriverbarhet.

Avslutningsvis ser vi på beviset for at grensen e eksisterer. Dette beviset har vi valgt å legge sist i oppgaven, da dette beviset trolig er for avansert til å inkludere i den videregående skolen.

1.2 Historisk overblikk

Derivasjon slik vi kjenner det i dag ble først introdusert av Isaac Newton og Gottfried Wilhelm Leibniz på andre halvdel av 1600-tallet [4]. Allerede i oldtiden hadde man sett på tangentkonstruksjoner, men tangentkonstruksjonene bygde da på de spesielle geometriske egenskapene ved de kurvene som ble studert. Det var først i 1637, etter at koordinatsystemet ble oppfunnet, at det ble innført en generell teknikk for tangentkonstruksjon av Fermat og Descartes [4]. Disse generelle teknikkene blir i dag sett på som forløpere til derivasjon. De var likevel begrenset ved at de bare kunne brukes på enkle kurver. Metodene de brukte var algebraiske; de måtte finne ut når likninger hadde en dobbeltrot for at de skulle finne en tangent. En forklaring på hvorfor metodene deres fungerte, kom derimot ikke [4]. En fullstendig derivasjonsteori med de regler og teknikker vi bruker i dag finner vi først, som tidligere nevnt, hos Newton og Leibniz. Som forklart i [4] tok Newton utgangspunkt i en partikkel som fulgte en kurve gitt av en likning $f(x, y) = 0$.

Newton tenkte seg en partikkel som ved et visst tidspunkt befant seg i punktet (x, y) med hastighetskomponenter $\dot{x}$ og $\dot{y}$. Da ble stigningstallet $\dot{y}/\dot{x}$, og målet var å beregne denne størrelsen. Ved å øke tiden med en uendelig liten (infinitesimal) størrelse o, ville partikkelen befinne seg i punktet $(x + o\dot{x}, y + o\dot{y})$. Siden tidsintervallet var uendelig lite, tillot Newton seg å regne som om hastigheten var konstant. Siden begge punktene over ligger på kurven var både $f(x, y)$ og $f((x + o\dot{x}, y + o\dot{y}))$ lik null.

Da fikk Newton likningen

$$f(x + o\dot{x}, y + o\dot{y}) - f(x, y) = 0$$

I utregningene så Newton bort fra alle ledd som inneholdt høyere potens av o i og med at disse størrelsene var mye mindre enn de som bare inneholder o i første potens. Deretter var det bare å løse likningen rett ut for å finne $\dot{y}/\dot{x}$. (For nærmere forklaring med eksempel se [4] s. 298).

Problemet med teknikken til Newton var at han noen steder regnet med den uendelige lille størrelsen som null, som for eksempel når o^2 ble neglisjert, mens han andre steder måtte anta at o var forskjellig fra null, der han f.eks dividerte med o. Likevel var disse infinitesimalene et nyttig regneredskap som gjorde det mulig å utvikle teknikker som ga løsninger på mange praktiske problemer på en rask og effektiv måte. Teoretisk sett var det vanskeligere å forstå for de fleste. Slik Lindstrøm forklarer i [4] hevdet Newton at det han tenkte seg var en grenseovergang hvor de forskjellige størrelsene gikk mot 0. Først halvannet århundre senere ble de tradisjonelle infinitesimalene forkastet av Cauchy, og han tok i bruk grensebegrepet slik Newton hadde foreslått. Han definerte en uendelig liten mengde som en variabel med grense lik null [2]. Cauchy anvendte de nye ideene sine om grenser på studiet av den deriverte og integraler. Han definerte den deriverte over et intervall der funksjonen er kontinuerlig, og kom frem til definisjonen av derivasjon slik vi kjenner den i dag [2], og som vi skal se nærmere på senere.

2 Læreplaner

Derivasjon er et viktig tema i norsk skole, og inngår i de fleste matematikkfagene i den videregående skolen. Vi vil nå komme med en liten oppsummering av hva som kan være verdt å merke seg i de forskjellige fagene i forhold til lærerplanene når det gjelder derivasjon.

2.1 1P og 2P - praktisk matematikk

I dette kurset skal elevene:

- gjøre rede for lineær vekst, og fastsette nullpunkt, ekstremalpunkt, skjæringspunkt.

Det vi altså kan merke oss er at derivasjon ikke er nevnt med ord, og elevene skal bare gjøre rede for begreper. Flere 1P elever er svake i matematikk, og motivasjonen for faget kan være lav. Det er dermed greit å være oppmerksom på å ikke bruke begreper som elevene ikke har forutsetninger til å forstå og som de heller ikke skal bruke videre. I 2P, som flere av disse elevene vil velge videre, er heller ikke derivasjon nevnt, men de skal:

- bruke digitale verktøy til å bestemme nullpunkt, ekstremalpunkt og skjæringspunkt og finne gjennomsnittleg vekstfart og tilnærmingsverdiar for momentan vekstfart.

De kommer altså inn på gjennomsnittlig vekstfart og momentan vekstfart, men skal ikke se noen sammenhenger videre.

2.2 1T - teoretisk matematikk

Dette er kurset for de som har gode forkunnskaper i matematikk fra ungdomsskolen, og som ofte velger S eller R matte videre. Elevene skal:

- beregne nullpunkt, ekstremalpunkt, skjæringspunkt og gjennomsnittelig vekstfart, finne tinærmede verdier for momentan vekstfart, og gi noen praktiske tolkninger av disse aspektene.
- gjøre greie for definisjonen av den deriverte, og bruke definisjonen til å utlede en formel for polynomfunksjoner, og bruke regelen til å drøfte funksjoner.

I dette kurset er derivasjon helt nytt for elevene, så det er viktig at elevene får tid til å lære nye begreper.

2.3 S1 og S2 - samfunnsfaglig matematikk

Flere elever velger S1 og S2 slik at de har den realfaglige kompetansen, tilsvarende R1, som flere studieretninger krever når de skal gå videre.
I S1 skal elevene:

- finne gjennomsnittlig veksthastighet ved regning, og finne tilnærmingsverdier for momentan vekst i praktiske anvendelser.
- gjøre rede for definisjonen av den deriverte, regne ut den deriverte til polynomfunksjoner og bruke den til å drøfte polynomfunksjoner.

S2: Elevene skal:

- derivere polynomfunksjoner, potensfunksjoner, eksponentialfunksjoner og logaritmefunksjoner, og summer, differanser, produkter og kvotienter av disse funksjonene, og bruke kjerneregelen til å derivere sammensatte funksjoner.
- drøfte forløpet til funksjoner ved å bruke førstederiverte og andrederiverte.
- tolke de grunnleggende egenskaper til en funksjon ved hjelp av grafen.

Som vi ser av læreplanmålene er det mye elevene skal igjennom i dette kurset innenfor derivasjon, og det er derfor ekstra viktig at elevene har det grunnleggende på plass. Det må mye trening til for å kunne si noe fornuftig om en funksjon kun ved å se på grafen, og elevene må få denne treningen.

2.4 R1 og R2 - realfaglig matematikk

I disse fagene er det flere motiverte elever, noe som kan komme av at noen trenger matematikk for videre studier.
R1: Innenfor temaet funksjoner er hovedområdet å se sammenhengen mellom en funksjon og den deriverte.
Elevene skal:

- gjøre rede for begrepene grenseverdi, kontinuitet og deriverbarhet, og gi eksempler på funksjoner som ikke er kontinuerlige eller deriverbare.
- bruke formler for den deriverte til potens-,eksponential-, og logaritmefunksjoner, og deriver summer,differanser, produkter,kvotienter,og sammensetninger av disse funksjonene.
- bruke førstederiverte og andrederiverte deriverte til å drøfte forløpet til funksjoner og tolke de deriverte i modeller av praktiske funksjoner.

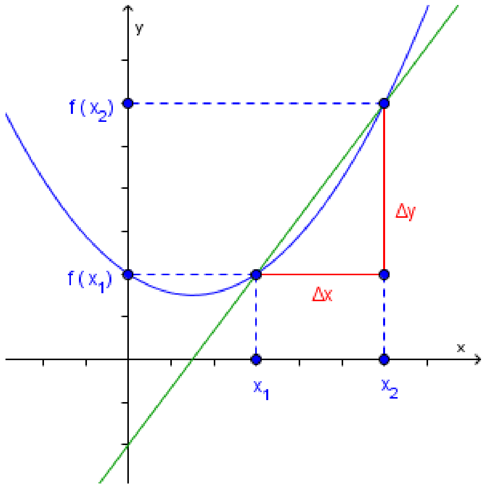
R2: Elevene skal:

- derivere sentrale funksjoner, og bruke førstederiverte og andrederiverte til å drøfte slike funksjoner.

Kompetansemålene over er hentet fra [8]

3 Introduksjon til derivasjon i skolen

Mange lærebøker bruker gjennomsnittlig vekstfart og vekstfart som grenseverdi, altså momentan vekstfart, for å forklare og introdusere derivasjon. Ved å ta utgangspunkt i en graf, som i figur 1 kan man repetere for elevene at man finner gjennomsnittlig vekstfart mellom to punkter $(x_1, f(x_1))$ og $(x_2, f(x_2))$ ved å ta differansen mellom funksjonsverdiene dividert med differansen mellom x-verdiene, altså $(f(x_2) - f(x_1))/(x_2 - x_1)$.



Figur 1: Gjennomsnittlig vekstfart

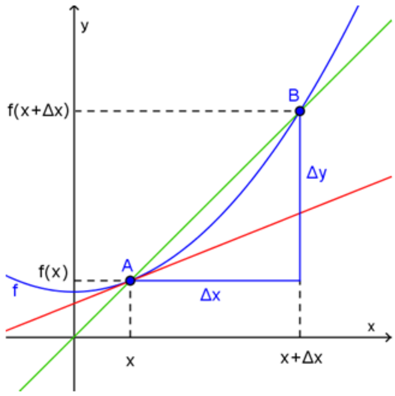
Videre kan man forklare at vi er interessert i en slik vekstfart når de to punktene er så nær hverandre som mulig. Det er det samme som at differansen mellom x-verdiene går mot null. For å illustrere dette kaller vi x-verdiene x og $x + \Delta x$.
Den gjennomsnittlige vekstfarten i intervallet er da $(f(x + \Delta x) - f(x))/(\Delta x)$. Vi er altså interessert i den momentane vekstfarten. Uttrykket for den momentane vekstfarten blir da:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Dette er den deriverte til funksjonen $f(x)$. Grenseverdien ovenfor eksisterer ikke alltid for alle verdier av x. Vi sier at funksjonen er deriverbar i punktet $x = a$ hvis grenseverdien eksisterer når $x = a$ [6].

Det kan være lurt å komme med noen relevante eksempler på hva derivasjon kan brukes til, slik at elevene lettere kan forstå hvorfor dette skal læres. Når vi ser på gjennomsnittlig- og momentan vekstfart, da er det naturlig å ta et eksempel som omhandler fart. Et mulig eksempel er å henvise til historien om Newton som så på farten til en partikkel. Et forvirrende moment ved en slik forklaringsmetode kan være konseptet momentan vekstfart, siden fart måles over en viss tid og vi er interessert i vekstfarten i et visst tidspunkt. Et annet mulig eksempel kan knyttes opp mot grensekostnader og grenseinntekter innenfor økonomi. Det tilsvarer en tilnærming til merkostnaden og merinntekten ved at man øker produksjonen med én enhet [7].

En geometrisk tolkning av den deriverte er at den er stigningstallet til tangenten i punktet, og en måte å illustrere dette på er å benytte seg av GeoGebra.



Figur 2: Gjennomsnittlig og momentan vekstfart

Vi har altså at $f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} (f(x + \Delta x) - f(x))/(\Delta x)$. Som nevnt tidligere skal elever som tar 1T "Gjøre greie for definisjonen av den deriverte, og bruke definisjonen til å utlede en formel for polynomfunksjoner". For å utlede en formel for den deriverte av en polynomfunksjon, kan man derivere noen polynomfunksjoner for deretter å se sammenhengen mellom resultatene en har fått. Vi vil ta med to eksempler på utregning av den deriverte til en funksjon ved hjelp av definisjonen av den deriverte.

Det første eksempelet vi vil ta for oss er å finne $f'(x)$ når $f(x) = x^2$:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x + \Delta x)^2 - x^2}{\Delta x}$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x^2 + 2x\Delta x + (\Delta x)^2 - x^2}{\Delta x}$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2x\Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x}$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} 2x + \Delta x$$

$$f'(x) = 2x$$

Ved hjelp av definisjonen av den deriverte har vi kommet frem til at $f'(x) = 2x$ når $f(x) = x^2$.

Et annet eksempel er å beregne $f'(x)$ når $f(x) = x^3$:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x + \Delta x)^3 - x^3}{\Delta x}$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x^3 + 3x^2\Delta x + 3x(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3 - x^3}{\Delta x}$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{3x^2\Delta x + 3x(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3}{\Delta x}$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x(3x^2 + 3x\Delta x + (\Delta x)^2)}{\Delta x}$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0}(3x^2 + 3x\Delta x + (\Delta x)^2)$$

$$f'(x) = 3x^2$$

Ut i fra slike beregninger av den deriverte til polynomfunksjoner kan elevene undersøke om det er noe mønster eller system i de deriverte til polynomer av ulik grad, og komme frem til formelen for den deriverte av et polynom som er $(x^n)' = nx^{n-1}$.

Det som gjør slike funksjoner lette å derivere er at vi får et 0/0 uttrykk.

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x + \Delta x)^n - x^n}{\Delta x}$$

Regner man ut dette uttrykket vil alle leddene inneholde Δx, denne faktoriserer vi ut, og forkorter. Ser vi derimot på funksjoner som $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \sin(x)/x$ kan vi ikke faktorisere dette uttrykket, og derivasjonen blir dermed mye vanskeligere enn for polynomer.

4 Generelle egenskaper ved derivasjon

Vi skal nå ta en nærmere titt på noen av de generelle egenskapene ved derivasjon. Senere skal vi også se på noen spesielle funksjoner som er verdt å merke seg i forhold til disse egenskapene, som det kan være lurt å være klar over når man skal undervise i derivasjon.

Som vi har vært inne på tidligere er den deriverte stigningstallet til tangenten til funksjonen i et punkt.

- Dersom $f'(x) = 0$, det vil si at funksjonen har en horisontal tangent, kan vi sjekke om funksjonen har et toppunkt eller et bunnpunkt. Dersom $f'(x)$ skifter fortegn i et punkt, er punktet et toppunkt eller et bunnpunkt for $f(x)$ [5].
- Dersom $f''(x) = 0$, kan vi sjekke om funksjonen har et vendepunkt. Et vendepunkt er et punkt der $f''(x)$ skifter fortegn [5].

5 Bevis for derivasjonsregler, ln x og e^x

5.1 Produktregelen

Produktregelen for derivasjon sier at dersom funksjonene g og h er deriverbare, så er $(g(x)h(x))' = g'(x)h(x) + g(x)h'(x)$. Dette skal vi nå bevise.
Vi har at

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

dersom grensen eksisterer. Vi setter $f(x) = g(x)h(x)$. Det gir

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(x + \Delta x)h(x + \Delta x) - g(x)h(x)}{\Delta x}$$

Vi legger til og trekker fra $g(x)h(x + \Delta x)$ i brøkens teller og får

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(x + \Delta x)h(x + \Delta x) - g(x)h(x + \Delta x) + g(x)h(x + \Delta x) - g(x)h(x)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(g(x + \Delta x) - g(x))h(x + \Delta x) + (h(x + \Delta x) - h(x))g(x)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(x + \Delta x) - g(x)}{\Delta x} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} h(x + \Delta x) + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{h(x + \Delta x) - h(x)}{\Delta x} \cdot g(x)$$

$$= g'(x)h(x) + h'(x)g(x).$$

Dette er forutsatt at $g'(x)$ og $h'(x)$ eksisterer.

5.2 Kjerneregelen

Selve beviset for kjerneregelen er relativt omfattende og strekker seg langt utenfor skolepensum i den videregående skolen. Det finnes likevel et kort og godt bevis som kan egne seg for undervisningen, men da må vi gjøre noen antakelser.
Anta at vi har funksjonen $f(x) = g(h(x))$. Vi vil vise at $f'(x) = g'(h(x))h'(x)$.
Vi starter med å bruke definisjonen av den deriverte:

$$g(h(a))' = \lim_{x \to a} \frac{g(h(x)) - g(h(a))}{x - a}$$

Anta nå at $h(x) \neq h(a)$ for alle x nær a. Vi kan nå multiplisere teller og nevner med $h(x) - h(a)$. Vi får da

$$= \lim_{x \to a} \frac{g(h(x)) - g(h(a))}{h(x) - h(a)} \cdot \frac{h(x) - h(a)}{x - a}$$

Uttrykket over kan skrives som produktet av to faktorer, og vi får

$$= \lim_{x \to a} \frac{g(h(x)) - g(h(a))}{h(x) - h(a)} \cdot \lim_{x \to a} \frac{h(x) - h(a)}{x - a}$$

$$= g'(h(x)) \cdot h'(x)$$

Dette gjelder kun dersom $h(x) - h(a) \neq 0$.Vi ser på tilfeller der $x \to a$, men $x \neq a$. Vi kan likevel få at $h(x) = h(a)$ dersom det finnes flere nullpunkter i et lite (punktert) omegn av a. Et eksempel på dette kan være oscillerende funksjoner, for eksempel $h(x) = \sin(1/x)$. Vi kan få punkter vilkårlig nær $x = 0$ hvor $\sin(1/x) = 0$. Når dette skjer, så vil uttrykket over være udefinert i og med at det inneholder divisjon med 0. Oscillerende funksjoner skal vi se nærmere på senere i denne oppgaven.

5.3 Kvotientregelen

Vi vet fra produktregelen at dersom $f(x) = g(x)h(x)$, så er $f'(x) = g'(x)h(x) + h'(x)g(x)$.
Vi vil nå ut ifra dette og kjerneregelen vise at

$$\left(\frac{g(x)}{h(x)}\right)' = \frac{g'(x)h(x) - g(x)h'(x)}{h(x)^2}$$

La oss nå anta at $f(x) = g(x)/h(x)$

$$f(x) = \frac{g(x)}{h(x)} = g(x)h(x)^{-1}$$

Ved å bruke kjerneregelen på $h(x)^{-1}$ med $h(x)$ som kjernen får vi videre

$$f'(x) = g'(x)h(x)^{-1} + g(x)(-1)h(x)^{-2}h'(x)$$

$$= \frac{g'(x)}{h(x)} - \frac{g(x)h'(x)}{h(x)^2}$$

$$= \frac{g'(x)h(x)}{h(x)h(x)} - \frac{g(x)h'(x)}{h(x)^2}$$

$$= \frac{g'(x)h(x) - g(x)h'(x)}{h(x)^2}$$

som var det vi skulle vise.

5.4 Den deriverte av ln x

For å bevise at $(\ln x)' = 1/x$ begytter vi av oss av definisjonen for den deriverte. Vi må i tillegg har kjennskap til definisjonen av e. Denne definisjonen skal vi se nærmere på senere.

$$e = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

som er det samme som

$$e = \lim_{n\to 0} (1+n)^{\frac{1}{n}}$$

Ifølge definisjonen av den deriverte får vi

$$(\ln x)' = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\ln(x+\Delta x) - \ln x}{\Delta x}$$

Vi vet ut ifra logaritmeregler at ln a - ln b = ln(a/b) og vi får dermed

$$\lim_{\Delta x\to 0} \frac{\ln(\frac{x+\Delta x}{x})}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{1}{\Delta x} \ln\left(\frac{x+\Delta x}{x}\right)$$

Igjen ser vi på logaritmeregler og finner at vi kan bruke regelen a ln b = ln a^b videre

$$\lim_{\Delta x\to 0} \ln\left(\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{1}{\Delta x}}\right)$$

Vi forenkler ved å substituere. Vi setter $u = \Delta x/x$. Da følger det at $1/\Delta x = 1/xu$. Vi observerer at når $\lim \Delta x \to 0$ vil også $\lim u \to 0$. Dermed får vi videre

$$\lim_{u\to 0} \ln(1+u)^{\frac{1}{xu}} = \lim_{u\to 0} \ln((1+u)^{\frac{1}{u}})^{\frac{1}{x}}$$

Vi bruker igjen den sistnevnte logaritmeregelen og får

$$\lim_{u\to 0} \frac{1}{x} \ln(1+u)^{\frac{1}{u}} = \frac{1}{x} \ln(\lim_{u\to 0}(1+u)^{\frac{1}{u}})$$

der grenseverdien er identisk med definisjonen av e. Altså får vi

$$\frac{1}{x} \ln e = \frac{1}{x}$$

5.5 Derivasjon av e

Vi vil bevise at $(e^x)' = e^x$.
La $f(x) = \ln(e^x)$. Deriverer vi $f(x)$ og bruker logaritmeregler får vi at

$$f'(x) = (\ln(e^x))' = (x \ln e)' = x' = 1$$

Deriverer vi $f(x)$ og benytter oss av kjerneregelen med e^x som kjerne får vi at

$$f'(x) = (\ln(e^x))' = \frac{1}{e^x}(e^x)'$$

Da må

$$\frac{1}{e^x}(e^x)' = 1$$

Videre får vi at

$$e^x \frac{1}{e^x}(e^x)' = e^x$$

$$(e^x)' = e^x$$

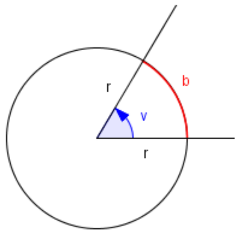
som var det vi skulle vise.

6 Bevis av $\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$

Det finnes flere metoder for å bevise $\lim_{x \to 0} \sin(x)/x = 1$. Vi vil her ta for oss to metoder for å vise dette, i tillegg til noen mer intuitive forklaringer, men aller først skal vi si noe kort om hvorfor vi bruker absolutt vinkelmål

6.1 Absolutt vinkelmål

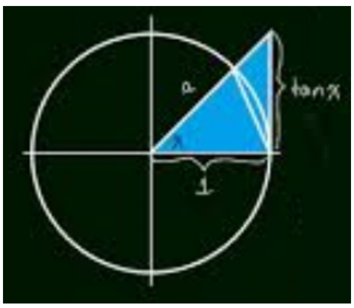
Når vi snakker om derivasjon av trigonometriske funksjoner bruker vi absolutt vinkelmål. Dette kan være greit å merke seg, da det er noe elever kan komme til å spørre om, siden de er mer kjent med grader.
Særlig hensiktsmessig er absolutt vinkelmål når vi bruker enhetssirkelen.



Figur 3: Absolutt vinkelmål

Ser vi på figur 3, hvor radius er 1, og bruker formelen for buelengde, får vi $v = b/r \rightarrow v = b$, altså har vi sammenheng mellom buelengde og vinkel.
Man kan bruke grader i stedet for radianer. Sammenhengen mellom grader og radianer er $360° = 2\pi$. For å bruke grader må man derfor ha med en faktor på $\pi/180$.
Når vi skal se på grensen $\lim_{x \to 0} \sin(x)/x$ er den kun lik 1 ved bruk av radianer.

6.2 Metode 1



Figur 4: Enhetssirkelen med vinkel x.

Fra figur 4 ser vi at vi kan lage tre forskjellige arealer. Dette vises tydligere ved utsnittene.

Figur 5: De tre ulike arealene.

Fra arealene på figur 5 ser vi at $A_1 < A_2 < A_3$. Vi finner derfor et utrykk for de tre arealene.

$$A_1 = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \sin(x) = \frac{\sin(x)}{2}$$

$$A_2 = \frac{x}{2\pi} \cdot \pi \cdot (1)^2 = \frac{x}{2}$$

$$A_3 = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \tan(x) = \frac{1}{2} \tan(x)$$

Vi får dermed uttrykket

$$\frac{\sin(x)}{2} < \frac{x}{2} < \frac{1}{2} \tan(x)$$

$$\sin(x) < x < \tan(x)$$

Vi bruker absoluttverditegn fordi vi ønsker å se på grensen når $x \to 0$ både ovenfra og nedenfra.

$$|\sin(x)| < |x| < |\tan(x)|$$

$$\frac{|\sin(x)|}{|\sin(x)|} < \frac{|x|}{|\sin(x)|} < \frac{|\tan(x)|}{|\sin(x)|}$$

$$1 < \frac{|x|}{|\sin(x)|} < \frac{1}{|\cos(x)|}$$

Vi inverterer hele ulikheten for å få $\sin(x)/x$, som er det uttrykket vi ønsker å finne grensen til når $\lim_{x\to 0}$.

$$1 > \frac{|\sin(x)|}{|x|} > |\cos(x)|$$

Nå fjerner vi absoluttverditegnene, fordi vi ser kun på 1.- og 4. kvadrant når $\lim\limits_{x\to 0}$, og da er alle uttrykkene over positive.

$$1 > \frac{\sin(x)}{x} > \cos(x)$$

Vi ser nå på hvert av uttrykkene når $\lim\limits_{x\to 0}$:

$$\lim_{x\to 0} 1 = 1$$

$$\lim_{x\to 0} \cos(x) = 1$$

Dette gir oss uttrykket:

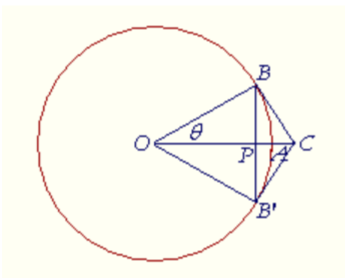
$$1 > \lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} > 1$$

Ved å bruke squeeze theorem må dermed

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$$

6.3 Metode 2

I forrige metode så vi på forskjellige arealer. I denne metoden skal vi se på beregning av lengder. Figur 6 er konstruert på følgende måte; linjestykket BC er tangenten til sirkelen i punktet B, og BC står dermed vinkelrett på OB.



Figur 6: Enhetssirkelen med $v = \theta$. Hentet fra http://www.themathpage.com/acalc/sine.htm

Fra figur 6 kan vi sette opp ulikheten
$BB' < \texttt{arc}BAB' < B'C + CB$

Vi finner uttrykk for disse lengdene, og setter inn i ulikheten.

$$BB' = 2\sin(\theta)$$

$$\texttt{arc}BAB' = \frac{2\theta}{2\pi} \cdot 2\pi \cdot 1 = 2\theta$$

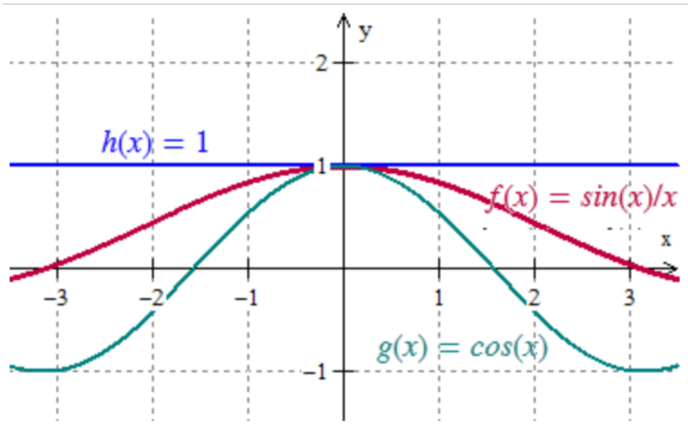
$$B'C + CB = 2\tan(\theta)$$

$$2\sin(\theta) < 2\theta < 2\tan(\theta)$$

$$\sin(\theta) < \theta < \tan(\theta)$$

Nå kjenner vi igjen dette uttrykket fra metode 1, og resten av fremgangsmåten blir derfor den samme.

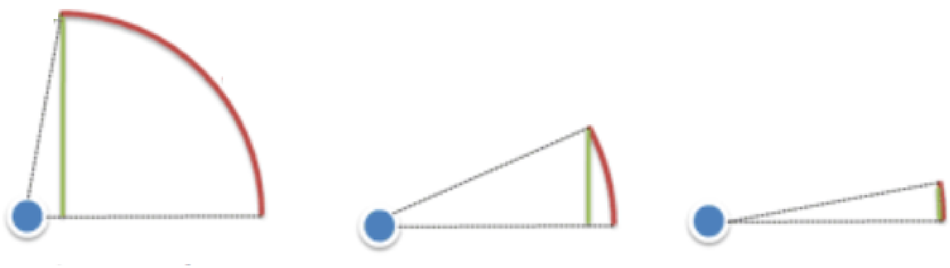
Dersom noen elever synes metode 1 og metode 2 er kompliserte, men forstår den siste ulikheten, kan man vise denne ulikheten geometrisk.



Figur 7: Grafisk fremstilling av $1 > \sin(x)/x > \cos(x)$

6.4 Vinkelforståelse

Dersom man er ikke har tid eller ønsker å gjennomgå bevisene i sin helhet, tar vi med noen raske intuitive måter å forklare at $\lim_{x\to 0} \sin(x)/x = 1$.
Fra tidligere har vi sett at buelengden tilsvarer vinkelen ved absolutt vinkelmål. Vi vet også at den verikale lengden i enhetssirkelen er sin$x$. Dersom vi nå slår sammen det vi vet fra før, kan vi da si noe kort og intuitivt om $\sin(x)/x$?



Figur 8: $\sin(x)/x$ ved forskjellige vinkler

Ser vi på den venstre figuren i figur 8, er vinkelen stor, og vi ser tydlig at $x > \sin(x)$. Dersom vi minker vinkelen vil lengden til $\sin(x)$ nærme seg lengden til x. Lar vi vinkelen nærme seg 0, som i figuren til høyre ser vi at der er $\sin(x) \approx x$.
Dette er en rask og intuitiv måte å vise elevene at $\lim_{x \to 0} \sin(x)/x = 1$, uten å gå inn på et langt bevis.

6.5 Talleksempler

Dersom elevene ikke er fortrolige med forklaringen om vinklene over, kan det også være nyttig å la elevene bruke kalkulator for å overbevise seg selv om at dette faktisk stemmer. Dersom man tar $\sin(x)$ på kalkulatoren, der x er et lite tall, vil man se at $\sin(x) \approx x$. Gjentar man dette med tall som nærmer seg 0, altså veldig små tall, får man at $\sin(x) = x$.
Feks $\sin(10^{-5}) = 10^{-5}$.

7 Derivasjon av $\sin x$

Vi skal nå ved hjelp av definisjonen av den deriverte, bevise at dersom $f(x) = \sin(x)$, er $f'(x) = \cos(x)$.
Definisjonen av den deriverte til $\sin(x)$ er som følger:

$$\sin'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin(x + \Delta x) - \sin(x)}{\Delta x}$$

Vi bruker videre at $\sin(x + \Delta x) = \sin(x)\cos(\Delta x) + \cos(x)\sin(\Delta x)$.

$$\sin'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin(x)\cos(\Delta x) + \cos(x)\sin(\Delta x) - \sin(x)}{\Delta x}$$

$$\sin'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\cos(x)\sin(\Delta x) + \sin(x)(\cos(\Delta x) - 1)}{\Delta x}$$

Videre bruker vi at

$$\cos(2u) = \cos^2(u) - \sin^2(u)$$

$$\cos(2u) = 1 - \sin^2(u) - \sin^2(u)$$

$$\cos(2u) = 1 - 2\sin^2(u)$$

Dermed er

$$\sin'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\cos(x)\sin(\Delta x) + \sin(x)(1 - 2\sin^2(\frac{\Delta x}{2}) - 1)}{\Delta x}$$

$$\sin'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\cos(x)\sin(\Delta x) + \sin(x)(-2\sin^2(\frac{\Delta x}{2}))}{\Delta x}$$

Grensen av en sum er lik summen av grensene:

$$\sin'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\cos(x)\sin(\Delta x)}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin(x)(-2\sin^2(\frac{\Delta x}{2}))}{\Delta x}$$

$$\sin'(x) = \cos(x) \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin(\Delta x)}{\Delta x} + \sin(x) \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{-2\sin^2(\frac{\Delta x}{2})}{\Delta x}$$

$$\sin'(x) = \cos(x) \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin(\Delta x)}{\Delta x} + \sin(x) \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{-\sin^2(\frac{\Delta x}{2})}{\frac{\Delta x}{2}}$$

$$\sin'(x) = \cos(x) \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin(\Delta x)}{\Delta x} + \sin(x) \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{-\sin(\frac{\Delta x}{2})}{\frac{\Delta x}{2}} \cdot \sin\left(\frac{\Delta x}{2}\right)$$

Som vi tidligere har vist er $\lim\limits_{\Delta x \to 0}(\sin(\Delta x))/(\Delta x) = 1$. I tillegg vet vi at $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \sin(\Delta x/2) = 0$

Den siste grensen i uttrykket for $\sin'(x)$ er dermed 0 og hele leddet forsvinner. Den første grensen i uttrykket for $\sin'(x)$ er 1, og vi sitter altså igjen med at:

$$\sin'(x) = \cos(x) \cdot 1 + \sin(x) \cdot (-1) \cdot 0$$

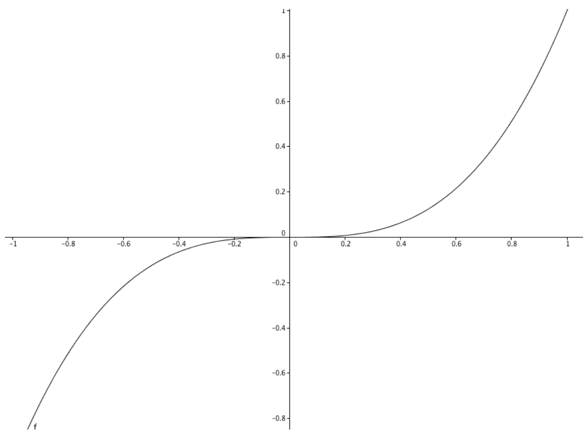
$$\sin'(x) = \cos(x)$$

Som var det vi skulle vise.

8 Viktige eksempler for skolematematikken

8.1 $f(x) = x^3$

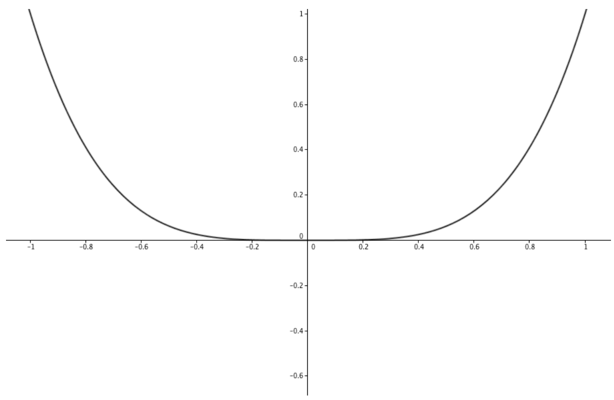
$f(x) = x^3$ er en funksjon det er verdt å merke seg fordi den er et eksempel på at $f'(x_0) = 0$, men der x_0 ikke er et ekstremalpunkt er $f(x) = x^3$.
Her har vi at $f'(x_0) = 3 \cdot 0^2 = 0$, men $(0, 0)$ er ikke et ekstremalpunkt. Dette er fordi $f'(x)$ ikke skifter fortegn i $x = x_0 = 0$.
Punktet $(f(x_0), x_0)$ kalles da et terrassepunkt og er ikke et ekstremalpunkt. Vi har altså at $(f(x_0), x_0)$ er et ekstremalpunkt dersom $f'(x_0) = 0$ og $f'(x)$ skifter fortegn i x_0, mens $(f(x_0), x_0)$ er et terrassepunkt dersom $f'(x_0) = 0$ men $f'(x)$ ikke skifter fortegn i x_0.



Figur 9: x^3

8.2 $f(x) = x^4$

Sinus for R2 sier at hvis $f''(x_0) = 0$ så er «som oftest» x_0 et vendepunkt.
Et eksempel på at $f''(x_0) = 0$, men x_0 ikke er et vendepunkt, er $f(x) = x^4$. Her er $f''(0) = 12 \cdot 0^2 = 0$, men $x = 0$ er som vi ser på figuren ikke et vendepunkt.
Dette er fordi $f''(x)$ ikke skifter fortegn i x_0.



Figur 10: x^4

8.3 $f(x) = |x|$

Selv om deriverbarhet impliserer kontinuitet, impliserer ikke kontinuitet deriverbarhet.
Et eksempel på en funksjon som er kontinuerlig i et hvert punkt $x = a$, men ikke overalt-deriverbar er $|x|$.

$|x|$ er kontinuerlig fordi $f(x) = |x|$ er definert, $\lim_{x \to a} |x|$ eksisterer og $\lim_{x \to a} |x| = |a|$. $|x|$ kan defineres som

$$f(x) = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$$

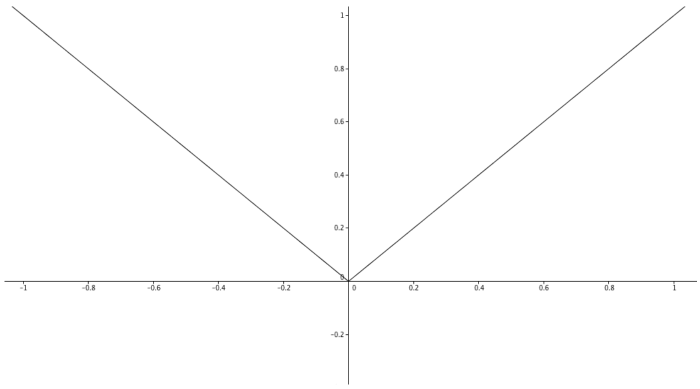
Når $x \geq 0$ er altså $f(x) = x$ og

$\lim\limits_{x \searrow 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{x \searrow 0} \frac{x-0}{x-0} = \lim\limits_{x \searrow 0} \frac{x}{x} = 1$

For alle $x < 0$ er altså $f(x) = -x$ og

$\lim\limits_{x \nearrow 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{x \nearrow 0} \frac{-x-0}{x-0} = \lim\limits_{x \nearrow 0} \frac{-x}{x} = -1$

Da grensen fra høyre og venstre er ulike eksisterer ikke grenseverdien, og $f(x)$ er dermed ikke deriverbar i $x = 0$.



Figur 11: $|x|$

8.4 $f_1(x) = \sin(1/x)$ og den tilhørende familien

Den siste typen funksjoner vi vil ta for oss er familien hvor $\sin(1/x)$ er selve "oldemoren". Vi vil se nærmere på $\sin(1/x)$ i første omgang. Er denne kontinuerlig? For å kunne svare på dette må vi være klar over definisjonen til en kontinuerlig funksjon.

$f(x)$ er kontinuerlig for $x = a$ dersom:

- $f(x)$ er definert i a.
- $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ eksisterer.
- $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$.

$f(x)$ er deriverbar for $x = a$ dersom:

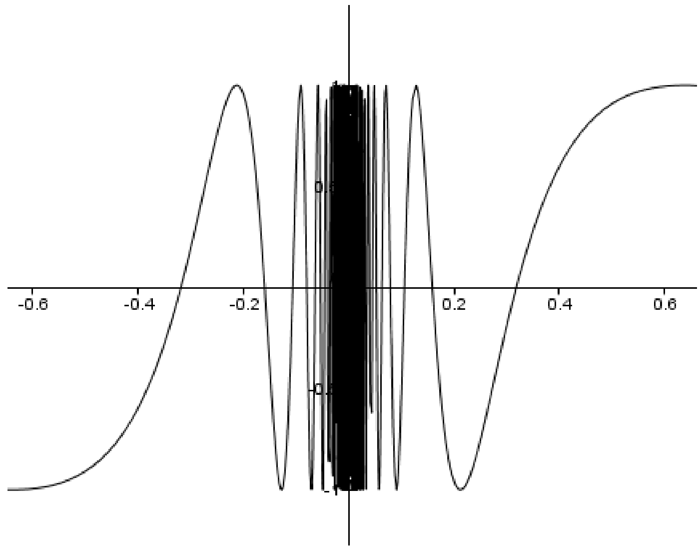
- $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$

$f(x)$ er kontinuerlig deriverbar dersom:

- $f(x)$ er deriverbar.
- $f'(x)$ er kontinuerlig.

Det er også verdt å merke seg at dersom $\lim_{x \to 0} f(x) = 0$ og $g(x)$ er begrenset, blir $\lim_{x \to 0} f(x)g(x) = 0$

8.4.1 $f_1(x) = \sin(1/x)$



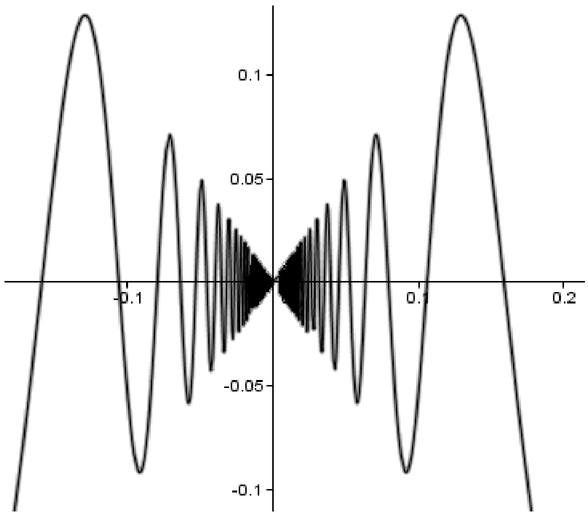
Figur 12: $f_1(x) = \sin(1/x)$

Dersom vi nå ser nærmere på $\sin(1/x)$ ser vi at denne funksjonen ikke er kontinuerlig i punktet $x = 0$. Det er fordi grenseverdien ikke eksisterer, noe som gjør at funksjonen heller ikke deriverbar i dette punktet. Dette kan man også se ved at funksjonen får en vertikal tangent i punktet $x = 0$, og en funksjon som har en vertikal tangent er ikke deriverbar. Funksjonen $\sin(1/x)$ varierer mellom 1 og -1, og når $x \to 0$ vil den oscillere kraftig. For å gjøre denne funskjonen kontinuerlig, ønsker vi å dempe denne oscilleringen. Så hva skjer dersom vi multipliserer denne funksjonen med x?

8.4.2 $f_2(x) = x\sin(1/x)$

Nå har vi multiplisert den opprinnelige funksjonen med x. Dette gjør at når $x \to 0$ vil funksjonen også gå mot 0. Denne funksjonen er ikke definert når $x = 0$, så vi definerer funksjonen slik:

$$f_2(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$



Figur 13: $x \sin \frac{1}{x}$

Som vi ser av figur 13 vil vi dermed klare å dempe oscilleringen som vi så i $\sin(1/x)$. Hvis vi ser nærmere på den deriverte til denne funksjonen i punktet $x = 0$,får vi

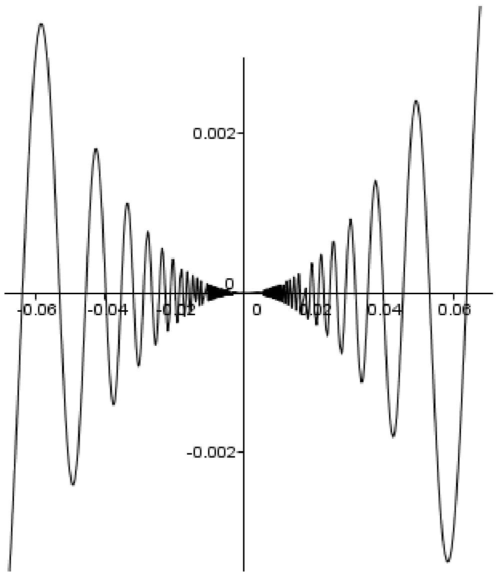
$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{x \sin \frac{1}{x}}{x} = \lim_{x \to 0} \sin \frac{1}{x} = \lim_{x \to 0} f_1(x)$$

Altså, $f_2(x)$ er kontinuerlig, men ikke deriverbar i $x = 0$. For at vi skal ha en funksjon som er kontinuerlig deriverbar prøver vi å utvide videre.

8.4.3 $f_3(x) = x^2 \sin(1/x)$

Vi så i forrige avsnitt at vi klarte å dempe oscilleringen ved å multiplisere med x. Kan vi dempe den ytterligere? Hva med å multiplisere med x en gang til? Vi definerer igjen funksjonen for $x = 0$

$$f_3(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$



Figur 14: $f_2(x) = x^2 \sin(1/x)$

Vi ser av figur 14 at x^2 og $-x^2$ demper oscilleringen enda mer enn bare x og $-x$. Det betyr at stigningstallet dempes mer i forhold til $x \sin(1/x)$. Dersom vi ser nærmere på den deriverte til denne funksjonen ser vi at

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2 \sin \frac{1}{x}}{x} = \lim_{x\to 0} x \sin \frac{1}{x} = 0$$

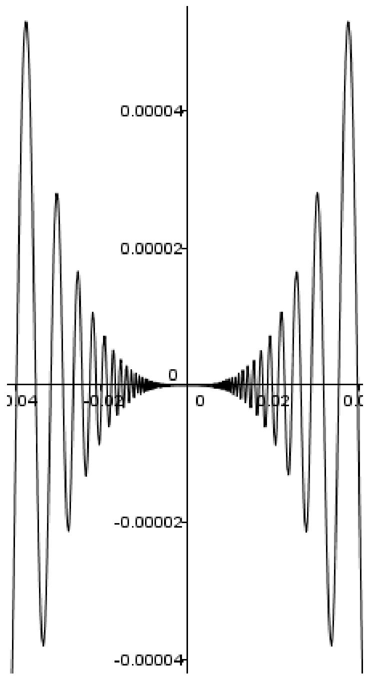
Altså er $f_3(x)$ kontinuerlig og deriverbar, så vi ser nærmere på den deriverte.

$$f_3'(x) = \begin{cases} 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

Da har vi at $f_3(x)$ er kontinuerlig og deriverbar i $x = 0$, men $f_3'(x)$ er ikke kontinuerlig. Dette er fordi $\lim_{x\to 0} -\cos(1/x)$ ikke eksisterer. Vi ønsker en funksjon som er kontinuerlig deriverbar, og vi utvider derfor funksjonen vår enda en gang.

8.4.4 $f_4(x) = x^3 \sin \frac{1}{x}$

$$f_4(x) = \begin{cases} x^3 \sin \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$



Figur 15: $x^3 \sin \frac{1}{x}$

Vi sjekker om funksjonen er deriverbar i $x = 0$, slik vi har gjort med de andre funksjonene:

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{x^3 \sin \frac{1}{x}}{x} = \lim_{x \to 0} x^2 \sin \frac{1}{x} = 0$$

Siden funksjonen er deriverbar også i $x = 0$, ser vi på den deriverte for å undersøke om den deriverte er kontinuerlig. $f_4'(x) = 3x^2 \sin(1/x) - x \cos(1/x)$, og vi vet at begge leddene er kontinuerlig, altså er $f_4(x)$ kontinuerlig deriverbar.

Referanser

[1] Cazelias, G.; Three equivalent definitions of e *Camosun College* (2010). Hentet fra `http://cazelais.disted.camosun.bc.ca/250/e-definition.pdf`

[2] Katz, V. J.; A history of mathematics, brief adition (2003)

[3] Klymchuk, S.; Counterexamples in calculus *Mathematical Assosiation of America, Inc.* (2010)

[4] Lindstrom, T.; Kalkulus *Universitetsforlaget* (2006)

[5] Oldervoll, T., Orskaug, O., Vaaje, A., Hanisch, F.; Sinus matematikk S2 *Cappelen Damm AS* (2008)

[6] Oldervoll, T., Orskaug, O., Vaaje, A., Hanisch, F., Hals, S.; Sinus matematikk 1T *Cappelen Damm AS* (2009)

[7] Rohnes, B.; Matematikk for økonomer - kort og godt. *Universitetsforlaget* (2008)

[8] Udir.no *Oslo* (2014)