Integrasjon

Skoleprosjekt MAT4010

Tiina K. Kristianslund, Julian F. Rossnes
og Torstein Hermansen

19. mars 2014

Innhold

1 Innledning

Mennesket har alltid hatt behov for å finne størrelsen til geometriske figurer og allerede i de tidligste kildeskriftene fra Egypt og Mesopotamia finner vi oppskrifter for å løse slike problemer matematisk. Den første dokumenterte systematiske metoden for å bestemme arealer ble utviklet av greske matematikere i oldtiden, i første rekke av Eudoxos (ca. 400-350 f. Kr.) og Arkimedes (287-212 f. Kr.). Den grunnleggende ideen var å tilnærme det geometriske området med små figurer som det var lett å beregne arealet til, for eksempel rektangler. Ved å velge stadig bedre approksimasjoner kunne man ved denne metoden finne den virkelige størrelsen til mange geometriske figurer som grenseverdien av de tilnærmede størrelsene.

Denne metoden hadde likevel sine klare begrensninger fordi noen arealer var vanskelige å tilnærme, og ikke minst fordi det regneteknisk ble uhåndterlig for kompliserte arealer. Det virkelig store gjennombruddet for intergralregning slik vi kjenner det i dag kom med Newton (1642-1727) og Leibniz (1646-1716). De viste at derivasjon og integrasjon er motsatte regnearter og at man kan integrere ved å antiderivere. Dette er kjent som analysens fundamentalteorem.

Analysens fundamentalteorem gjorde at integralregning gikk fra være spesifikke arealberegninger ved hjelp av grenseverdier til en generell metode ved hjelp av antiderivasjon. I denne oppgaven vil vi se på integraler som en grenseverdi av rektangler hvor vi lar bredden gå mot null. Deretter vil vi illustrere analysens fundamentalteorem ut fra en enkel figur før vi vil gi et forenklet bevis for teoremet.

2 Integrasjon

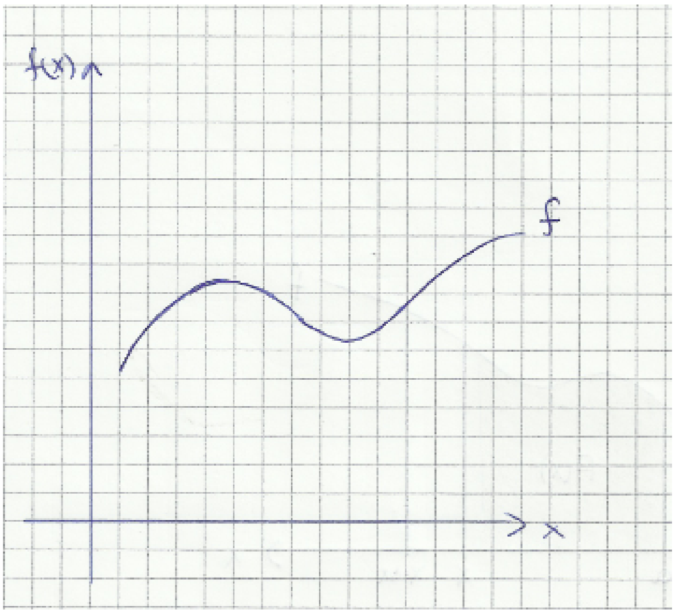
Vi vet hvordan vi kan regne ut arealet til rektangler og volumet av rette prismer. Hva arealet (eller volumet) til andre objekter er, som ikke er like "pene", de uten rette kanter, er ikke like åpenbart. Slike arealer kan tilnærmes ved hjelp av rektangler. I denne teksten ser vi på Riemann-integralet, siden andre integrasjonstyper ikke er pensum i videregående skole.

Vi ønsker å finne arealet under grafen til f på intervallet $[a, b]$. Tanken er at vi deler opp intervallet $[a, b]$ i flere delintervall, og regner ut et areal av rektangler som ligger kant i kant på disse delintervallene. De punktene som vi bruker som delepunkter på intevallet $[a, b]$ blir tilsammen en mengde punkter. Den mengden kaller vi partisjonen P.

$$P = \{x_0, x_1, x_2, ..., x_{n-1}, x_n\}$$

Her har vi at

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_{n-1} < x_n = b$$



Figur 1: Grafen til en funksjon f.

Ved hjelp av partisjonen P har vi nå kunne dele opp intervallet $[a, b]$ i n lukkede delintervall.

Før vi går videre trenger vi også å minne om hva supremum og infimum er. Når vi ser på en funksjon på et lukket og begrenset intervall er supremum den største verdien funksjonen antar på intervallet, mens infimum er den minste verdien.

Vi skriver supremum og infimum slik

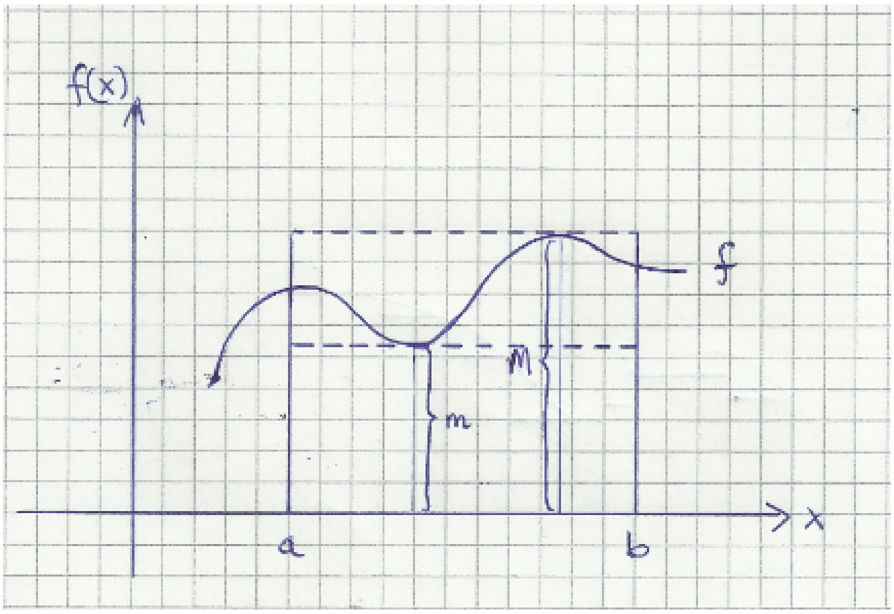
$$M = \sup \{f(x) : x \in [a, b]\}$$

$$m = \inf \{f(x) : x \in [a, b]\}$$

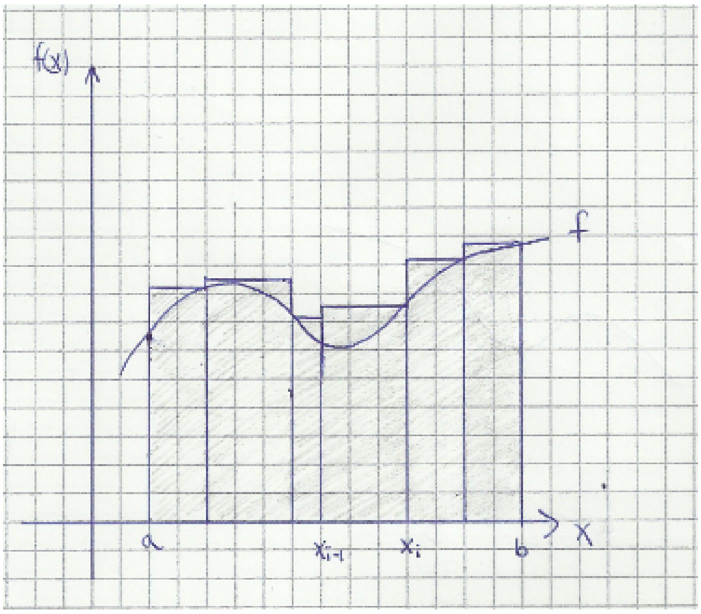
Vi tar for oss en funksjon som er positiv på $[a, b]$. Argumentasjonen blir lik om funksjonen skifter fortegn, men det gjør forklaringen enklere hvis vi holder oss til det positive tilfellet. Hvis vi for hvert delintervall lager rektangler med bredde $x_i - x_{i-1}$ og høyde M, blir arealet til det i-te rektangelet $M_i(x_i - x_{i-1})$. Om vi summerer alle rektanglene får vi det vi definerer som øvre trappesummen til partisjonen P.

$$Ø(P) = \sum_{i=1}^{n} M_i(x_i - x_{i-1})$$

På samme måte får vi nedre trappesum ved at høyden til rektanglene er



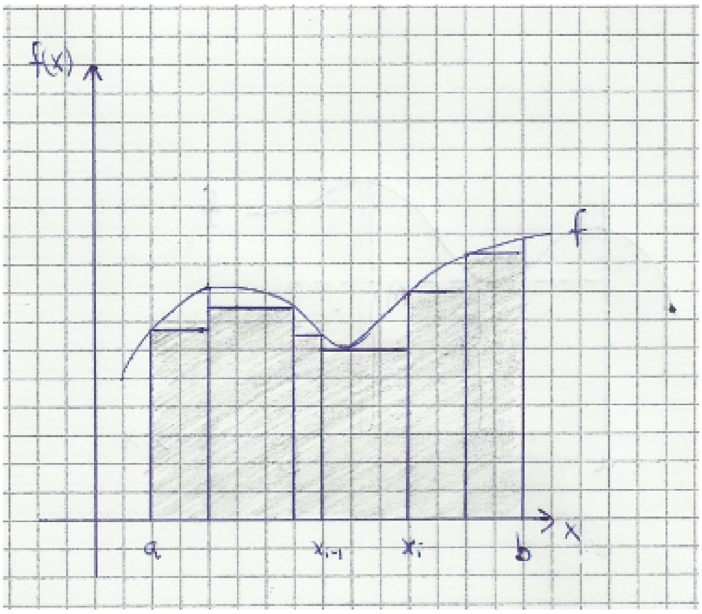
Figur 2: Supremum (M) og infimum (m) til f på intervallet $[a, b]$.



Figur 3: Arealet av rektanglene er den øvre trappesummen til partisjonen.

infimum til funksjonen på delintervallene.

$$N(P) = \sum_{i=1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1})$$



Figur 4: Arealet av rektanglene er den nedre trappesummen til partisjonen.

Vi ser at den øvre og nedre trappesummen avhenger av hvilken partisjon vi velger. Ideen er at om vi velger oss en partisjon hvor avstanden mellom delepunktene går mot null vil øvre og nedre trappesum nærme seg hverandre. Om vi tar den største nedre skranken til de øvre trappesummene vil vi få det som kalles øvreintegralet

$$\overline{\int_a^b} f(x)\,dx = \inf(\text{Ø}(P))$$

Nedreintegralet er supremum av de nedre trappesummene

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,dx = \sup(N(P))$$

Om vi nå har at øvreintegralet er det samme som nedreintgralet er f integrerbar på $[a, b]$, og vi definerer integralet som

$$\int_a^b f(x)\,dx = \overline{\int_a^b} f(x)\,dx = \underline{\int_a^b} f(x)\,dx$$

Med integralet definert kan man undersøke hvilke funksjoner som er integrerbare, altså for hvilke funksjoner denne prosessen fører fram. Svaret i første omgang blir at alle kontinuerlige funksjoner definert på et lukket og begrenset intervall er integrerbare, siden infimum og supremum alltid vil eksistere. Siden funksjonen er kontinuerlig er også kravet om at øvre og nedre trappesum skal konvergere mot samme verdi oppfylt.

Før vi går videre til analysens fundamentalteorem skal vi se et eksempel på en ikke-integrerbar funksjon.

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{hvis } x \text{ er rasjonal} \\ 0 & \text{hvis } x \text{ er irrasjonal} \end{cases}$$

Denne funksjonen er ikke kontinuerlig, men den har supremum og infimum! Uansett valg av partisjon vil ethvert intervall inneholde både både rasjonale og irrasjonale tall. Denne funksjonen vil derfor alltid ha en øvre trappesum

$$Ø(P) = 1$$

og en nedre trappesum

$$N(P) = 0$$

Funksjonen er ikke integrerbar fordi øvre og nedre trappesum aldri vil møtes. Vi vil ikke få at differansen mellom nedre og øvre sum går mot null selv om vi lager inndelingen finere og finere.

Det finnes altså funksjoner som er så uregelmessige at de ikke kan integreres.

3 Analysens fundamentalteorem

Analysens fundamentalteorem er et svært viktig teorem innen matematikken som knytter sammen integrasjon og derivasjon. Vi vil her presentere teoremet, gi en begrunnelse for at det stemmer, og deretter gi et forenklet bevis. Vi starter med selve teoremet.

Teorem 3.1. *Anta at $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ er kontinuerlig. Da er f integrerbar på ethvert intervall $[a, x]$ der $a \leq x \leq b$ og funksjonen $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ er en antiderivert til f på $[a, b]$.*

Vi kan illustrere analysens fundamentalteorem ved hjelp av figur 5.

Vi antar at vi har en funksjon $f(x)$ over intervallet $[a, b]$ og vi lar arealet under grafen fra a til x være $A(x)$. Ved å legge til Δx, får vi arealet A(x + Δx). Dersom vi lar Δx være tilstrekkelig liten, vil $\Delta x \cdot f(x)$ danne et rektangel med areal tilnærmet likt $A(x + \Delta x) - A(x)$:

$$A(x + \Delta x) - A(x) \approx f(x) \cdot \Delta x$$

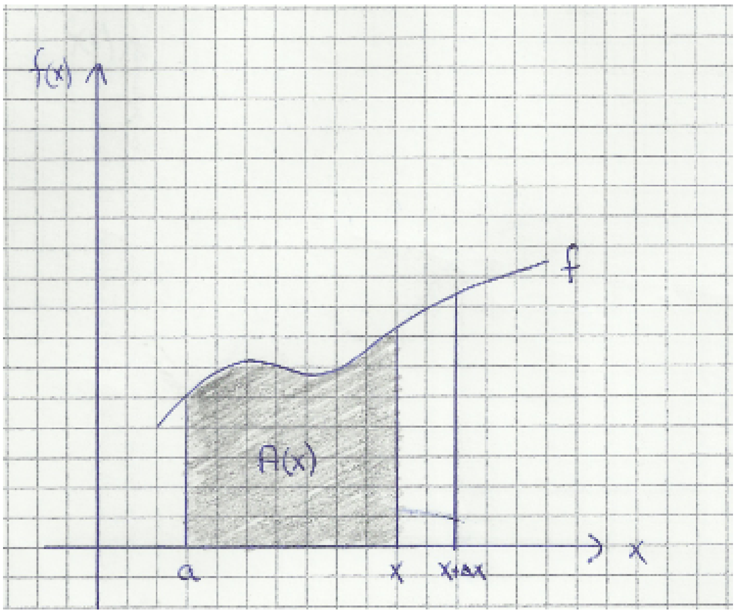
Denne tilnærmingen blir bedre jo mindre Δx er.

Vi deler på Δx på begge sider av likhetstegnet:

$$\frac{A(x + \Delta x) - A(x)}{\Delta x} \approx f(x)$$

Grenseverdien av dette når Δx går mot null er den deriverte til A. Vi får dermed at

$$A'(x) \ = f(x)$$



Figur 5: Arealet under grafen.

når Δx går mot null.

Dette er en indikasjon på hvorfor arealet under grafen er gitt ved den antideriverte til funksjonen. Dette er derimot ikke et matematisk bevis, men ment som en illustrasjon som kan være enkel å bruke i undervisning for å fremme forståelse hos elevene.

Vi vil nå gi et forenklet bevis for analysens fundamentalteorem.

Bevis. Anta at vi starter med en kontinuerlig funksjon $f(x)$. Man kan da vise at denne også er integrerbar, for dette viser vi til [1].

Da vil

$$M = \sup \{f(t) : t \in [x, x + \Delta x]\}$$

$$m = \inf \{f(t) : t \in [x, x + \Delta x]\}$$

Vi får at

$$\Delta x \cdot m \leq \int_x^{x+\Delta x} f(t)\, dt \leq \Delta x \cdot M$$

Siden vi antar at f er integrerbar finnes en funksjon $F(x)$ som gir oss arealet under grafen. Da vil $F(x + \Delta x) - F(x) = \int_x^{x+\Delta x} f(t)\, dt$. Vi deler med Δx og får

$$m \leq \frac{F(x + \Delta x) - F(x)}{\Delta x} \leq M$$

Tar vi nå grensen når $\Delta x \to 0$ vil både m og M gå mot $f(x)$, altså

$$f(x) \leq \lim_{\Delta x \to 0} \frac{F(x + \Delta x) - F(x)}{\Delta x} \leq f(x)$$

Dette viser at $F(x)$ er en antiderivert til $f(x)$, og beviset er fullført.

$\square$

Læreplanen for matematikk R2 sier at "eleven skal kunne gjøre rede for definisjonen av bestemt integral som grense for en sum og ubestemt integral som antiderivert". Det vi har gått gjennom i denne teksten dekker dette fra et lærersynspunkt. I og med at elevene skal kunne gjøre rede for definisjonen av ubestemt integral som en antiderivert, tenker vi at det er nyttig at vi viser analysens fundamentalteorem gjennom den illustrasjonen som vi har med i denne oppgaven. Beviset for analysens fundamentalteorem som vi har gitt inneholder imidlertid notasjon og definisjoner som er ukjent for de fleste elever i videregående skole. Vi har presentert det matematiske beviset her fordi det er viktig at lærerne kjenner til det, slik at de kan være fleksible i sin forklaringsmåte.

4 Referanser

[1] Lindstrøm, T. (1995). *Kalkulus*. 3. utgave. Oslo: Universitetsforlaget.

[2] Utdanningsdirektoratet. *Læreplan i matematikk for realfag - programfag i studiespesialiserende utdanningsprogram - kompetansemål.*
Hentet 10.03.2014 fra
`http://www.udir.no/kl06/MAT3-01/Kompetansemaal/?arst=1858830314&kmsn=-1169861940`

[3] Wikipedia. *Integral.*
Hentet 07.03.2014 fra `http://en.wikipedia.org/wiki/Integral#History`