# Kombinatorikk og sannsynlighetsregning

Aasum, Jon-Henning & Maers, Rafael Lukas

1. april 2014

**Sammendrag**

Denne artikkelen forsøker å gi en god forklaring på grunnleggende kombinatorikk og sannsynlighetsregning, med eksempler fra blant annet sjansespill for å belyse anvendelser. Målgruppen er lærere og elever opptil videregående skole.

# Innhold

# 1 Kombinatorikk

For å senere kunne beregne sannsynligheter trenger man ha oversikt over alle mulige utfall og kombinasjoner, og dette finner vi ut ved bruk av kombinatorikk. Kombinatorikk innebærer det område av matematikken som går ut på å telle mulige kombinasjoner, altså utfall, etter gitte regler. I denne seksjonene skal vi sette noen forutsetninger som gjør det mulig å forenkle tellingen, og ved bruk av disse verktøyene kan vi lage uttrykk som vi kan bruke til å beregner mengde mulige kombinasjoner under gitte regler. I tillegg skal vi anvende disse uttrykkene på problemstillinger fra virkeligheten.

## 1.1 Forutsetninger

### 1.1.1 Multiplikasjonsregelen

Dersom situasjonen består av flere trinnvise valg mellom flere elementer blir antall kombinasjoner lik antall elementer i første valgrunde multiplisert med antall elementer i andre runde, også videre.

**Definisjon 1** Hvis det er $p$ typer, og den $i$-te typen har $n_i$ valgmuligheter, så er det $n_1 \cdot n_2 \cdots n_i \cdots n_p$ valgmuligheter totalt. ■

**Eksempel 1** Du står opp om morgen og skal kle på deg. Du har 2 gensere, 4 bukser og 3 par sko. Hvor mange antrekk kan du velge mellom?

$$2\,(\text{gensere}) \cdot 4\,(\text{bukser}) \cdot 3\,(\text{par sko}) = 24\,(\text{antrekk})$$

◊

**Eksempel 2** Kort i en kortstokk har 13 forskjellige verdier og 4 forskjellige typer. Dermed blir mengde forskjellige kort (kombinasjoner):

$$4\,(\text{typer}) \cdot 13\,(\text{verdier}) = 52\,(\text{valgmuligheter})$$

◊

### 1.1.2 Fakultet

Multiplikasjonsregelen kan videre bli brukt til å telle mengde mulige kombinasjoner av et gitt utvalg n. For eksempel hvis man har en pose med forskjellige klinkekuler, hvor mange rekkefølger av dem er det vi kan få? Den første kulen vi velger vil gi $n$ muligheter. Den andre kulen har dermed $(n-1)$ forskjellige typer, og den tredje vil ha $(n-2)$ muligheter, osv. Dette gir oss $n-(r-1)$ muligheter ved valget $r$. Dette fortsetter til vi har bare én klinkekule igjen. Vi får dermed at antallet mulige kombinasjoner av $n$ klinkekuler er $n(n-1)(n-2)\cdots 1$. Det siste uttrykket dukker ofte opp i kombinatorikk, og det kan være nyttig gi det egen notasjon.

**Definisjon 2** Funksjonen $f : \{0\} \cup \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}$ definert ved $f(n) = n \cdot f(n-1)$ og $f(1) = 1$ kalles fakultet, og skrives $f(n) = n!$. ■

Fra eksempelet ovenfor kan vi si at antallet mulige kombinasjoner av $n$ klinkuler er $n!$ ($n$ fakultet), som med 5 klinkekuler gir $5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$. Følgende egenskap forklarer hvorfor den siste faktoren er 1.

**Egenskap A** $0! = 1$

*Bevis.* Siden $f(1) = 1 \cdot f(0)$, så får vi $f(0) = \frac{f(1)}{1} = \frac{1}{1} = 1$. □

### 1.1.3 Utvalgskategorier

I de neste delseksjonene skal vi se på forskjellige utvalgskategorier, som kan være *ordnet* eller *uordnet* og *med tilbakelegging* eller *uten tilbakelegging*. Her er det også verdt å merke seg at ordnede utvalg også kalles for *permutasjoner*, mens uordnede utvalg kalles *kombinasjoner*.

## 1.2 Ordnet utvalg med tilbakelegging

Ordnet utvalg betyr at rekkefølgen på utvalgene er viktig og tilbakelegging betyr at det er lov med duplikater i rekkefølgen (for eksempel velge den samme klinkekulen flere ganger). Vi har dermed samme mengde muligheter hver gang, siden hvert valg vil ikke minske mengde utvalg. Ved $n$ utvalg vil mengde mulige valg være $n$ hver gang, og ved bruk av multiplikasjonsregelen vil dette gi $n \cdot n \cdots n = n^r$ hvor $r$ er antall valg.

**Definisjon 3** For en gitt mengde med $n$ elementer og $r$ utvalg, så er det $n^r$ mulige ordnet ulvalg med tilbakelegging. ■

**Eksempel 3** Ved en eksamen ble det stilt 6 spørsmål med 4 svaralternativ (a, b, c og d) for hvert spørsmål. Hvor mange permutasjoner av svar finnes det?

$$4^6 = 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 = 4096$$

◊

**Eksempel 4** Vi har en pose med fem klinkekuler med forskjellige farger. Hvor mange permutasjoner av klinkekuler kan man lage av fire klinkekuler når man kan legge tilbake klinkelulene i posen etter hvert valg? Hva med etter 6 valg?

$$5^4 = 625$$
$$5^6 = 15625$$

$\diamond$

## 1.3 Ordnet utvalg uten tilbakelegging

I dette tilfelle er rekkefølgen fortsatt viktig (permutasjon), men det er i tillegg ikke lov med duplikater (samme farge, nummer, type, osv). Da får vi at utvalgsmengden blir redusert etter hvert valg, altså at første valget gir $n$ muligheter, andre gir oss $(n-1)$ muligheter, osv. Dette gir oss igjen $n-(r-1) = n-r+1$ muligheter ved valget $r$. For eksempel, hvis man har 5 forskjellige valgmuligheter og man skal velge 3 av dem blir det $5 \cdot (5-1) \cdot (5-2) = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$. Mer generelt blir dette $n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots (n-r+1)$, der $n$ er antall valgmuligheter og $r$ er antall valg.

Det er mulig å bruke fakultet for forenkle uttrykket, men vi må passe på å gi oss tidligere (før det bare er ett valg igjen). Vi må derfor fjerne de valgene vi ikke skal telle fra fakultetet. Dette gjør vi ved å dele på fakultet med forskjellene mellom mengde valg vi skal gjøre og valgmulighetene. Det gir oss følgende uttrykk.

$$\frac{5!}{(5-3)!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{2 \cdot 1} = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$$

**Definisjon 4** For en gitt mengde med $n$ elementer og $r$ utvalg, så er antallet mulige ordnet utvalg uten tilbakelegging gitt ved følgende uttrykk.

$$\frac{n!}{(n-r)!} = n \cdot (n-1) \cdots (n-r+1)$$

Vi skriver dette som ${}_n\mathrm{P}_r$, der $P$ står for *permutation* (permutasjon). ■

## 1.4 Uordnet utvalg uten tilbakelegging

I dette tilfellet er rekkefølgen ikke viktig, altså vi teller kombinasjoner. Ved å bygge på det som ble definert tidligere kan vi enklere telle oss fram til svaret i dette tilfellet også. Den eneste forskjellen mellom ordnet utvalg uten tilbakelegging og uordnet utvalg uten tilbakelegging er det at ved uordnet trenger vi ikke å telle rekkefølger som inneholder de samme typene. For eksempel, hvis vi skal telle mengde permutasjoner uten tilbakelegging av valgmulighetetene $\{A, B, C\}$ og vi skal ha 2 valg blir de ordnende mulighetene $AB, AC, BA, BC, CA, CB$. Når rekkefølge er det samme blir for eksempel mulighetene $AB$ det samme som $BA$, $AC = CA$ og $BC = CB$. Vi må derfor passe på at ikke dette blir telt to ganger:

$$\{AB, AC, BA, BC, CA, CB\} \setminus \{BA, CA, CB\} = \{AB, AC, BC\}$$

Hvis vi skal gjøre tilsvarende operasjon med tall, så ønsker vi at alle permutasjoner (ordnede utvalg) av $r$ elementer skal bli 1. Dette kan vi oppnå ved å dele ${}_n\mathrm{P}_r$ (antall ordnede utvalg uten tilbakelegging) med $r!$ (antall permutasjoner av $r$ elementer).

**Definisjon 5** For en gitt mengde med $n$ elementer og $r$ utvalg, så er antallet mulige uordnede utvalg uten tilbakelegging gitt ved følgende uttrykk.

$$\frac{{}_n\mathrm{P}_r}{r!} = \frac{n!}{r! \cdot (n-r)!}$$

Vi skriver dette som ${}_n\mathrm{C}_r$, der $C$ står for *combination* (kombinasjon). ■

Fra eksempelet ovenfor gir dette oss følgende.

$${}_3\mathrm{C}_2 = \frac{{}_3\mathrm{P}_2}{2!} = \frac{3!}{2! \cdot 1!} = \frac{6}{2} = 3$$

Et faktum som ikke er umiddelbart tydelig ut ifra definisjonen er at ${}_n\mathrm{C}_r = n!/r! \cdot (n-r)! = n(n-1)\cdots(n-r+1)/r!$, der $n$ og $r$ er naturlige tall, er et naturlig tall. Logisk sett stemmer dette siden vi faktisk teller mulige kombinasjoner (vi kan for eksempel ikke ha en halv valgmulighet), men for å være sikre ønsker vi et sterkere argument. Den franske matematikeren Blaise Pascal beviste i sin tid at ${}_{(n+1)}\mathrm{C}_{(r+1)} = {}_n\mathrm{C}_r + {}_n\mathrm{C}_{(r+1)}$. Det ga opphav til Pascals trekant (figur 1), der hvert tall er summen av tallene skrått ovenfor. Se på figuren ($n$ rader, $r$ kolonner) og bli fortrolig med at tallene følger formelen til Pascal.

$$\begin{array}{ccccccccccccccc}
 & & & & & & & 1 & & & & & & & \\
 & & & & & & 1 & & 1 & & & & & & \\
 & & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & & \\
 & 1 & & 6 & & 15 & & 20 & & 15 & & 6 & & 1 & \\
1 & & 7 & & 21 & & 35 & & 35 & & 21 & & 7 & & 1
\end{array}$$

Figur 1: Pascals trekant.

Det kan vises ved induksjon at summen av to naturlige tall også er et naturlig tall, slik at hvis vi kan vise at ytterkanten av trekanten består av naturlige tall så vil også innsiden nødvendigvis bestå av naturlige tall. Følgende egenskap gir oss akkurat det vi trenger, der vi ser på ${}_n\mathrm{C}_r$ når $r = 0$ og $r = n$.

**Egenskap B** ${}_n\mathrm{C}_0 = {}_n\mathrm{C}_n = 1$

*Bevis.* Dette følger fra ren algebra.

$$
\begin{aligned}
{}_n\mathrm{C}_0 &= \frac{n}{0! \cdot (n-0)!} = \frac{n!}{1 \cdot n!} = 1 \\
{}_n\mathrm{C}_n &= \frac{n}{n! \cdot (n-n)!} = \frac{n!}{n! \cdot 1} = 1
\end{aligned}
$$

□

Vi kan altså med sikkerhet si at ytterkanten består av enere, og fra formelen til Pascal kan vi regne ut innsiden rad for rad. Uansett hvor mye vi snur og vender på det, så vil de påfølgende tallene være summen av to naturlige tall, som nødvendigvis også vil være naturlige tall. Således kan vi være sikre på at ${}_n\mathrm{C}_r$ alltid er et naturlig tall.

**Merknad.** Opphavet til Pascals trekant stammer egentlig fra studier av koeffisienter til polynomer på formen $(x+y)^n$, der koeffisienten til det $r$-te leddet betegnes med $\binom{n}{r}$ og tilsvarer ${}_n\mathrm{C}_r$. Begge notasjonene er i bruk i forskjellige lærebøker.

Til slutt er det også verdt å merke seg at Pascals trekant er symmetrisk. Det er ikke tilfeldig, og følger fra følgende egenskap.

**Egenskap C** ${}_n\mathrm{C}_r = {}_n\mathrm{C}_{(n-r)}$

*Bevis.* Dette følger fra ren algebra.

$$
{}_n\mathrm{C}_r = \frac{n!}{r! \cdot (n-r)!}
$$

$$
{}_n\mathrm{C}_{(n-r)} = \frac{n!}{(n-(n-r))! \cdot (n-r)!} = \frac{n!}{r! \cdot (n-r)!}
$$

□

En forklaring på denne egenskapen er at det er det samme antall utvalg om man velger $r$ av $n$ eller ikke velger $n-r$ av $n$. For eksempel dersom man skal ta ut et stafettlag på fire av seks personer. Antall utvalg blir det samme om man velger hvilke fire som skal gå stafetten, eller hvilke to som ikke skal gå.

## 1.5 Uordnet utvalg med tilbakelegging

Dette tilfellet ligner det forrige tilfellet, men vi kan nå ha med duplikater. Vi prøver derfor å bruke det vi kjenner, altså ${}_n\mathrm{C}_r$, og bygger videre på dette, Vi må finne en måte å telle med de kombinasjonene som er av samme type. Fra eksempelet over blir det da $\{AA, BB, CC\}$. Det blir vanskelig å addere disse til det allerede eksisterende uttrykket, altså ${}_n\mathrm{C}_r + k$. I stedet prøver vi å tolke problemet slik at det kan tolkes som uordnet utvalg uten tilbakelegging. Det er flere måter å gjøre dette på, og vi tar for oss to av dem.

**Forklaring 1.** Vi har en pose med tre klinkekuler med forskjellige farger $(A, B, C)$, og skal velge fem stykker med tilbakelegging. Hver gang vi velger en kule, legger vi den til side og legger en duplikat av kulen (merket med valgnummer i senket skrift i dette eksempelet) tilbake i posen. I begynnelsen består posen vår av tre kulene $[A, B, C]$. La oss si at vi velger $C$ først. Da tar vi den ut og erstatter den med en duplikat og får $[A, B, C_1]\ C$. Neste valg er $B$ slik at vi får $[A, C_1, B_2]\ C, B$. De påfølgende valgene blir $A, C, B$, og hvert steg i utvalget er illustrert i tabell 2. Merk at når vi har gjennomført det siste valget, så trenger vi ikke å legge en duplikat tilbake fordi vi er ferdige med å velge.

| # | Kule | Oversikt |
|---|---|---|
| 0 | | $[A, C, B]$ |
| 1 | C | $[A, B, C_1]\ C$ |
| 2 | B | $[A, C_1, B_2]\ C, B$ |
| 3 | A | $[C_1, B_2, A_3]\ C, B, A$ |
| 4 | C | $[B_2, A_3, C_4]\ C, B, A, C_1$ |
| 5 | B | $[A_3, C_4]\ C, B, A, C_1, B_2$ |

Figur 2: Uordnet utvalg med tilbakelegging i forklaring 1.

Vi har nå gjennomført et utvalg med tilbakelegging. Hvis vi legger alle kulene tilbake, tar et utvalg uten tilbakelegging og velger de samme kulene; så får vi samme antall utvalg som med tilbakelegging. Det vil si, vi velger $C_1, B_2, A_3, C_4, B$ fra $[A, B, C, C_1, B_2, A_3, C_4]$ og står igjen med $[A, C]\ C_1, B_2, A_3, C_4, B$. Altså tilsvarer et uordnet utvalg av fem fra tre med tilbakelegging, med et uordnet utvalg av fem fra syv uten tilbakelegging. Det kan virke falskt å velge de samme kulene siden vi ikke har kontroll over hvilke kuler vi velger, men det lar seg enkelt løse ved å sette alle duplikater til variable slik at vi har $[A, B, C, X_1, X_2, X_3, X_4]$ og ender opp med $[A, C]\ X_1, X_2, X_3, X_4, B$. Om vi velger $A$, $B$ eller $C$ til slutt spiller ingen rolle: fremgangsmåten og resultatet blir det samme. Mer generelt ser vi at et uordnet utvalg av $r$ fra $n$ med tilbakelegging tilsvarer et uordnet utvalg av $r$ fra $(n + r - 1)$ uten tilbakelegging.

**Definisjon 6** For en gitt mengde med $n$ elementer og $r$ utvalg, så er antallet mulige uordnede utvalg med tilbakelegging gitt ved følgende.

$$ {}_{(n+r-1)}\mathrm{C}_r = \binom{n+r-1}{r} = \frac{(n+r-1)!}{r! \cdot (n+r-1-r)!} = \frac{(n+r-1)!}{r! \cdot (n-1)!} $$

■

Fra eksempelet ovenfor får vi følgende.

$$ {}_{(3+5-1)}\mathrm{C}_5 = \frac{(3+5-1)!}{5! \cdot (3-1)!} = \frac{7!}{5! \cdot 2!} = 21 $$

**Forklaring 2.** La oss ta eksemplet over og løse problemet på en annen måte. La oss telle hvor mange ganger en type klinkekule som ble valgt. Hver type klinkekule blir delt med skiller slik at vi har beholdere, altså at vi har: $A|B|C$.

For hver gang vi velger en type klinkekule skriver vi en $O$ i beholderen til den type. Etter første valget som ble $C$ har vi da: $||O$.

Etter alle valgene våre, altså at vi har valgt en $A$ kule, to $B$ kuler og to $C$ kuler, blir notasjonen da: $O|OO|OO$.

Ved å da ta flere forskjellige valgmuligheter, for eksempel at vi har valgt en $A$ kule, tre $B$ kuler og en $C$ kule, kan vi se et mønster: $O|OOO|O$.

Vi ser at vi har hele tiden $r = 5$ sirkler som vi plasserer i de mellom $n - 1 = 3 - 1 = 2$ skillevegger. Altså problemet blir å telle antall måter vi kan plassere $r$ sirkler og $n - 1$ skillevegger på en linje. Denne linjen har $(r + n - 1)$ steder å plassere en sirkel eller en skillevegg, altså kan vi telle hvor mange kombinasjoner av dette vi kan få. Problemet kan da bli tolket som ${}_{(r+n-1)}\mathrm{C}_r$. Vi kan også tolke det som en kombinasjon av skilleveggene, altså:

$$
\begin{aligned}
{}_{(r+n-1)}\mathrm{C}_{(n-1)} &= \binom{n+r-1}{n-1} \\
&= \frac{(n+r-1)!}{(n-1)! \cdot (n+r-1-(n-1))!} \\
&= \frac{(n+r-1)!}{(n-1)! \cdot (n+r-1-n+1)!} \\
&= \frac{(n+r-1)!}{r! \cdot (n-1)!}
\end{aligned}
$$

Hvis vi ser tilbake til eksempelet, så ser vi at dette gir samme svar som forrige metode. Årsaken til at de to uttrykkene gir samme svar er nettopp på grunn av symmetrien i Pascals trekant, som vi så i delseksjonen med uordnet utvalg uten tilbakelegging.

$$
\begin{aligned}
{}_{(r+n-1)}\mathrm{C}_{(n-1)} &= {}_{(3+5-1)}\mathrm{C}_{(3-1)} = {}_7\mathrm{C}_2 = 21 \\
{}_{(r+n-1)}\mathrm{C}_r &= {}_{(3+5-1)}\mathrm{C}_5 = {}_7\mathrm{C}_5 = 21
\end{aligned}
$$

# 2 Sannsynlighetsregning

Sannsynlighetsregning er læren om sannsynlighet, og i denne seksjonen skal vi se nærmere på hva det betyr, utvikle en matematisk teori og anvende teorien på problemstillinger fra virkeligheten.

## 2.1 Bakgrunn

Allerede de gamle grekerne spilte sjansespill der utfallet var ukjent, likesom dagens terningsspill. Slike spill har vært populære så lenge de har vært kjent, og de viste seg å være motivasjonen for utviklingen av sannsynlighetsregning slik vi kjenner det i dag. I følge matematikkhistorikerne, så var det de franske matematikerne Blaise Pascal og Pierre de Fermat som la de teoretiske grunnsteinene på midten av 1600-tallet, etter en forespørsel om gevinst i et terningsspill. Siden har matematikere som Bernoulli, Moivre, Laplace og Gauss utfyllt og utvidet teorien. Grunnleggende sannsynlighetsregning som undervises på utdanningsinstitusjoner i dag bygger på matematisk analyse, og ble publisert i 1933 av Andrey Kolmogorov.

## 2.2 Sannsynlighetsteori

I denne delseksjonen skal vi utvikle en matematisk teori for sannsynlighet, og likesom våre forfedre benytte sjansespill (for eksempel myntkast, terningkast og lotto) som utgangspunkt. Innholdet forutsetter grunnleggende mengdelære, og vi sparker det hele i gang med terminologi.

**Definisjon 7** Mengden $\Omega$ av alle mulige utfall kalles et **utfallsrom**, og en delmengde $A \subseteq \Omega$ av et utfallsrom kalles en **hendelse**. ■

Et utfallsrom er rett og slett en mengde med elementer, der hvert element symboliserer et utfall og alle mulige utfall er i utfallsrommet. Det har ingen øvre begrensning, men i enhver problemstilling vil vi som regel begrense utfallsrommet til det som er relevant. Følgende er et eksempel.

**Eksempel 5** Vi kaster en seks-sidet terning og ser på antall øyne på siden som lander opp. Da er $\Omega = \{1, 2, ..., 6\}$, og $A = \{1, 2, 3\} \subseteq \Omega$ hendelsen der vi får mindre eller lik tre øyne. $\Diamond$

For å motivere sannsynlighetsbegrepet, skal vi tenke oss en situasjon likesom i eksempelet ovenfor. Der er alle mulige utfall gjort rede for, slik at hvis vi kaster en seks-sidet terning, så må ett av utfallene forekomme. Hvilket utfall som forekommer er ukjent i forkant, men ingen utfall er gunstigere enn andre, og de har således like stor sannsynlighet. Siden alle utfall har samme sannsynlighet, så vil sannsynligheten for (ett av) to utfall være dobbelt så stor som sannsynligheten for ett utfall. Helt generelt vil sannsynligheten øke lineært med antall utfall, dvs. sannsynligheten for $n$ utfall er $n$ ganger så stor som sannsynligheten for ett utfall.

I lengden kan det bli slitsomt å omtale sannsynlighet som en relativ størrelse, og vi kan løse dette ved å tilegne det et tall. Her har vi i utgangspunktet uendelig mange muligheter, men la oss for enkelthets skyld si at sannsynligheten for ett utfall er tallet 1. Det virker greit så lenge vi betrakter én situasjon om gangen, men skaper problemer så fort vi skal sammenligne sannsynligheter mellom to forskjellige situasjoner. For eksempel vil sannsynligheten for å få en ener ved kast av en seks-sidet terning og for å trekke et spar ess fra en kortstokk være det samme. Det lar seg enkelt løse ved å normalisere sannsynligheten med antallet mulige utfall, slik at sannsynligheten for å få en ener ved kast av en sekssidet terning er $\frac{1}{6}$ og sannsynligheten for å trekke et spar ess er $\frac{1}{52}$. Da kommer forskjellen i sannsynlighet tydelig frem, uten at man er nødt til å betrakte den bakomliggende situasjonen.

La oss oppsummere med å si at sannsynligheten for ett av $n$ utfall er $\frac{1}{n}$, og at den øker lineært med antall utfall. Det medfører at sannsynligheten for en hendelse med $m$ utfall er $\frac{m}{n}$ og at sannsynligheten for et (hvilket som helst) utfall er $\frac{n}{n} = 1$.

******************

Hensikten med motivasjonen ovenfor er å fremkalle et matematisk sannsynlighetsbegrep fra vår intuitive forståelse av konseptet. I den første paragrafen identifiserer vi sannsynlighet, og resten er en formalisering i et mer matematisk språk. Kjennskap til prosessen fra idé til matematikk er viktig for en grunnleggende forståelse av sannsynlighetsregning, men det er verdt å merke seg at vi ikke sier hva sannsynlighet faktisk er. Vi sier derimot hva det bør være ut i fra vår intuisjon, med andre ord: vi definerer. Det kan hende at ikke alle er enige i argumentene og definisjonen, og det gir opphav til forskjellige tolkninger av sannsynlighet. Vi kan likevel betrygge oss selv med at resultatene våre stemmer resultater fra empiriske forsøk.

**Eksempel 6** Frekvensdefinisjonen av sannsynlighet sier at sannsynligheten for et utfall er grenseverdien til den relative frekvensen av utfallet etter mange forsøk. La oss si at man har kastet en terning mange ganger og oppdaget at den relative frekvensen for å få ett øye på siden som lander opp ser ut til å gå mot $\frac{1}{6}$. Det samme har den relative frekvensen for å få to øyne på siden som lander opp. Den relative frekvensen for å få ett eller to øyne på siden som lander opp er da $\frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{2}{6}$. Per frekvensdefinisjonen er dette også sannsynligheten for hendelsen. Det viser at beregningene og resultatene er det samme, uansett hvilken definisjon vi bruker.

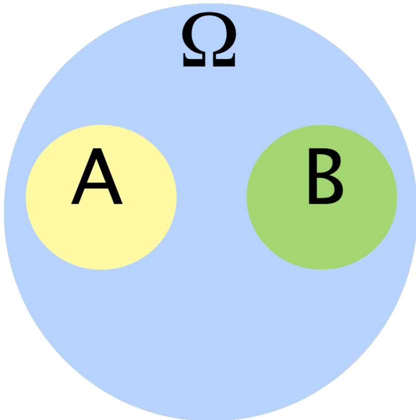
Følgende er den matematiske definisjonen av sannsynlighet som benyttes på utdanningsinstitusjoner i dag. Ved første øyekast kan den virke fjern fra vårt mer uformelle sannsynlighetsbegrep ovenfor, men de skal vise seg å komme godt overrens.

**Definisjon 8** Sannsynlighet er verdien til en funksjon $P : \mathcal{P}(\Omega) \to \mathbb{R}$ der

i) $P(\Omega) = 1$.

ii) Hvis $A \subseteq \Omega$, så $P(A) \geq 0$.

iii) Hvis $A_1 \cap A_2 = \emptyset$, så $P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2)$. ■




Figur 3: To hendelser uten felles utfall.

Definisjonen består av nøye utvalgte aksiomer som impliserer vår intuitive forståelse av sannsynlighet. Det er viktig å være fortrolig med dette, så la oss omformulere definisjonen og sammenligne.

**Definisjon 2 (omformulert)** Sannsynligheten til en hendelse er et tall mellom 0 og 1 der

i) Sannsynligheten for et hvilket som helst utfall er 1. (NB! Skal ikke forveksles med sannsynligheten for *ett* utfall).

ii) Sannsynligheten for en hendelse er ikke negativ.

iii) Sannsynligheten til to hendelser uten felles utfall er summen av sannsynlighetene til hendelsene.

Hvis vi ser tilbake på vår uformelle definisjon, så finner vi (nesten) ingen uoverensstemmelser. De to første aksiomene begrenser sannsynligheten for en hendelse til et tall i intervallet $[0, 1]$. Det tredje aksiomet kan virke mystisk, og i tilfeller der sannsynligheten for alle utfall er den samme, så tilsvarer det at sannsynligheten øker lineært med antall utfall: hvis sannsynligheten for alle utfall er $\frac{1}{6}$, så er sannsynligheten for en hendelse med 5 utfall $\frac{5}{6}$. Det er derimot verdt å merke seg at den også inkluderer tilfeller der sannsynligheten ikke er den samme for alle utfall.

**Eksempel 7** Vi kaster en urettferdig seks-sidet terning og ser på antall øyne som lander opp. Da er $P$ definert ved $P(1) = P(2) = P(3) = P(4) = P(5) = \frac{1}{10}$, $P(6) = \frac{5}{10}$ en funksjon som tilfredsstiller aksiomene i definisjon 8. ♢

Ved første øyekast kan dette virke urovekkende, fordi argumentene i vår uformelle definisjon av sannsynlighet hviler på antagelsen om at alle utfall har samme sannsynlighet. Til tross for fraviket, så er det faktisk en fordel fordi vi kan benytte teorien i problemstillinger der sannsynligheten ikke er likt fordelt utover utfallsrommet. Forskjellen er at vi generelt ikke kan beregne sannsynligheten for en hendelse ut i fra sannsynligheten for ett utfall og antall utfall i hendelsen, slik vi kan med en vanlig terning. I steden for er vi nødt til å se på sannsynligheten for hvert utfall i hendelsen.

**Eksempel 8** Vi kaster en seks-sidet terning og ser på antall øyne som lander opp. La $A$ være hendelsen der det er mer enn tre øyne.

Hvis terningen er rettferdig, så kan vi benytte vår uformelle definisjon. Der er sannsynligheten for ett utfall $\frac{1}{6}$, og siden det er tre utfall i $A$, så er $P(A) = 3 \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{3}{6}$.

Hvis terningen er urettferdig (med $P$ fra eksempel 7), så kan vi benytte definisjon 8. Da så er $A = \{4, 5, 6\}$, der $\{4\} \cap \{5\} \cap \{6\} = \emptyset$, slik at $P(A) = P(\{4\}) + P(\{5\}) + P(\{6\}) = \frac{1}{10} + \frac{1}{10} + \frac{5}{10} = \frac{7}{10}$.

Vi kan altså ikke benytte vår uformelle definisjon til å beregne sannsynligheten til en urettferdig terning, men definisjon 8 gir tilsvarende utregning og riktig svar. $\diamondsuit$

Vi skal nå benytte definisjon 8 til å utlede noen generelle egenskaper ved sannsynlighet. Bevisene er ikke spesielt vanskelige, men det kan være lurt å tegne Venn-diagram (slik som figur 3) for å visualisere. Den første egenskapen gjør oss i stand til å finne sannsynligheten for at en hendelse ikke forekommer, som er svært nyttig i mange sammenhenger.

**Egenskap D** $P(A^c) = 1 - P(A)$

*Bevis.* Siden $A \cap A^c = \emptyset$, så følger det av det tredje aksiomet at $P(A) + P(A^c) = P(\Omega)$. Av det første aksiomet er $P(\Omega) = 1$, og ved å substituere og flytte får vi $P(A^c) = 1 - P(A)$. $\square$

Den andre egenskapen sier at hvis vi har to hendelser $A$ og $B$, der alle utfallene i $A$ også er utfall i $B$, så er sannsynligheten til $A$ mindre eller lik sannsynligheten til $B$.

**Egenskap E** Hvis $A \subseteq B$, så $P(A) \leq P(B)$.

*Bevis.* Siden $B = A \cup (B \cap A^c)$, så følger det fra det tredje aksiomet at $P(B) = P(A) + P(B \cap A^c)$ og dermed $P(A) = P(B) - P(B \cap A^c) \leq P(B)$. $\square$

Vi kom tidligere frem til at sannsynligheten til en hendelse øker lineært med antall utfall, og da virker det rimelig at sannsynligheten for ingen utfall er lik null. Den tredje egenskapen bekrefter våre mistanker.

**Egenskap F** $P(\emptyset) = 0$

*Bevis.* Dette følger fra egenskap D, der $P(\emptyset) = 1 - P(\Omega) = 1 - 1 = 0$. $\square$

Den fjerde og siste egenskapen er en generalisering av det tredje aksiomet, og gjør i stand til å beregne sannsynligheten til to hendelser selv når de har felles utfall. Hovedproblemet med å addere sannsynligheten til hver av hendelsene når de har felles utfall, er at sannsynligheten til $A \cap B$ taes med to ganger. Benytt gjerne Venn-diagrammet i figur 4 til hjelp underveis i beviset.

**Egenskap G** $P(A \cup B) = P(B) + P(B) - P(A \cap B)$

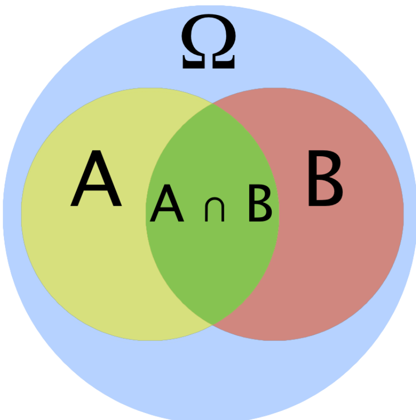
*Bevis.* Hvis $A \cap B = \emptyset$, så er $P(A \cap B) = 0$ av egenskap F, som gir oss det tredje aksiomet. Vi antar at $A \cap B \neq \emptyset$. Da kan $A \cup B$ deles i tre disjunkte mengder $C = A \cap B^c$, $D = A \cap B$ og $E = A^c \cap B$, der $A = C \cup D$ og $B = D \cup E$. Fra det tredje aksiomet er

a) $P(A) = P(C) + P(D)$

b) $P(B) = P(D) + P(E)$

c) $P(A \cup B) = P(C) + P(D) + P(E)$

Ved å kombinere resultatene ovenfor er $P(A) + P(B) = P(C) + 2P(D) + P(E) = P(A \cup B) + P(D)$, slik at $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(D) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$. $\square$




Figur 4: To hendelser med felles utfall.

Den matematiske teorien for sannsynlighetsregning begynner å ta form, og vi kan allerede benytte resultatene våre for utføre beregninger og besvare enkle problemstillinger. Vi skal likevel ha litt is i magen og ta med to observasjoner før vi tar på oss festhatten og ser på anvendelser.

**Eksempel 9** Vi kaster en seks-sidet terning med øynene lukket, og en annen spiller sier ifra hvis det er mindre eller lik fire øyne på siden som lander opp. Hva er da sannsynligheten for at vi fikk to øyne?

Fra før av vet vi at sannsynligheten for at vi fikk to øyne er $\frac{1}{6}$, men dette endrer seg så fort vi vet at vi allerede har fått mindre eller lik fire øyne. Da begrenses utfallsrommet til $\{1, 2, 3, 4\}$, og sannsynligheten således da til $\frac{1}{4}$. $\diamondsuit$

Eksempelet ovenfor viser hvordan sannsynligheten for en hendelse endrer seg når en annen hendelse har inntruffet. Hovedpoenget er at vi reduserer utfallsrommet, og ser på sannsynligheten for hendelsen i det reduserte rommet. Sagt på en annen måte: sannsynligheten for hendelsen normaliseres med sannsynligheten for hendelsen som har inntruffet. Dette kalles betinget sannsynlighet, og er en definisjon verdig. Benytt gjerne Venn-diagrammet i figur 4 til støtte.

**Definisjon 9** La $A$ og $B$ være to hendelser med $P(B) \neq 0$. Da er den **betingede sannsynligheten** til $A$, gitt at $B$ har inntruffet, gitt ved

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

$\blacksquare$

Betinget sannsynlighet har praktiske anvendelser, men har betydelig større teoretiske konsekvenser. Intuitivt tenker vi oss at to hendelser er uavhengige dersom den ene hendelsen ikke påvirkes av den andre, og omvendt. I vår teori kan det uttrykkes matematisk som $P(A|B) = P(A)$ og $P(B|A) = P(B)$. Ved å benytte definisjonen for betinget sannsynlighet, så blir dette ekvivalent med $P(A \cap B) = P(A)P(B)$. Altså har vi uttrykt uavhengige hendelser matematisk, og følgende blir vår siste definisjon.

**Definisjon 10** La $A$ og $B$ være to hendelser. Vi sier at hendelsene er uavhengige hvis $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$. $\blacksquare$

Det er ikke opplagt at dette er et viktig resultat, og betinget sannsynlighet har flere ess i ermet (som vi ikke skal gå inn på i denne omgang). Et opplagt bruksområdet er imidlertid verifisering av om to hendelser er uavhengige. Hvis vi kjenner $P(A)$, $P(B)$ og $P(A \cap B)$, så kan vi enkelt og greit regne ut hver side av ligningen og se om de er like. Det skal også vise seg å være nyttig i neste seksjon om anvendelser, der vi også skal benytte resultater fra seksjonen om kombinatorikk.

## 2.3 Diskusjon

Utgangspunktet for matematiske teorier er ofte en idé; og likesom Pascal og Fermat, brukte vi eksempler fra sjansespill i vår utvikling av en matematisk teori for sannsynlighetsregning i forrige delseksjon. Det er en god måte å introdusere sannsynlighetsregning på, men kan gjøre det problematisk å bruke begrepet *sannsynlighet* i andre situasjoner. I hypotetisk-deduktiv metode fremsettes det en hypotese, og hvis ingen observasjoner falsifiserer hypotesen, så ville de fleste si at hypotesen mest sannsynlig er korrekt. Vitenskapsfilosofen Karl Popper fra forrige århundre var uenig, fordi uansett hvor mange observasjoner som bekrefter hypotesen, så kan det være uendelig mange observasjoner som falsifiserer hypotesen på et senere tidspunkt. En enkel hypotese i denne sammenhengen er "Hvis man kaster en mynt, så får man alltid kron.". Til tross for at man har fått kron i de tre hundre første kastene, så kan man få uendelig mange mynt hvis man fortsetter å kaste mynten. Motsetninger som dette har gitt opphav til flere forskjellige tolkninger av sannsynlighet, som for eksempel frekvensdefinisjonen i eksempel 8.

Opphavet og utbredelsen av sannsynlighetsregning og statistikk skyldes anvendelighet; det løser mange problemer der andre metoder faller kort. Naturvitenskapen var tidlig ute med å benytte seg av disse verktøyene, og hadde allerede i løpet av andre halvdel av 1800-tallet utviklet teorien om statistisk mekanikk. Det tok ikke lang tid før teorien om kvantemekanikk, der de minste partiklene oppfører tilfeldig, ble realisert. Til tross for at teorien har bred aksept blant vitenskapsmenn i dag, så har dens tolkning hatt en turbolent fortid. Nettopp fordi partikler oppfører seg tilfeldig, så vil fysiske fenomener forekomme med en sannsynlighet. Dette var revolusjonerende i vår oppfatning av verden, fordi det strider mot oppfatning om at naturen - likesom klassisk mekanikk - er deterministisk (forutsigbar). Kvantemekanikkens tilfeldige natur og bruk av sannsynlighetsregning for å beskrive verden gav opphav til forskjellige tolkninger av teorien på bakgrunn av filosofiske spørsmål om hvordan verden henger sammen.

Til slutt bemerker vi oss at eksistensen av flere tolkninger av sannsynlighet kan medføre tvetydighet. Vi må være oppmerksomme på hvilken sammenheng vi benytter begrepet i og hvordan vi tolker resultatene. Det kan tross alt åpne dybt filosofiske spørsmål og forandre verdenssyn.

# 3 Anvendelser

I denne seksjonen skal vi se på tre anvendelser av kombinatorikk og sannsynlighetsregning.

## 3.1 Pokerhender

Poker er et populært sjansespill. De profesjonelle hevder at det har lite med sannsynlighet å gjøre, mens nybegynnere ofte sliter med å lære seg alle pokerhendene. I denne delseksjonen skal vi se nærmere på hvor stor sannsynlighet noen av pokerhendene faktisk har.

En kortstokk består av 52 kort, fordelt på fire forskjellige typer, der hver type har 13 forskjellige kort. Typene er hjerter (H), ruter (R), spar (S) og kløver (K). Kortene rangeres fra 1 til 13. Vi symboliserer hjerter knekt med H10 og spar ess med S13.

Videre er det åtte forskjellige pokerhender. Følgende er en oversikt.

- Ett par, for eksempel H2 og K2. $(*)$
- To par, for eksempel H2, K2 og S7, H7.
- Tre like, for eksempel H2 og K2 og S2. $(*)$
- Straight, for eksempel S5, R6, H7, S8 og K9.
- Flush, for eksempel H2, H3, H7, H9 og H11.
- Fullt hus, også kjent som ett par og tre like. $(*)$
- Fire like, for eksempel H5, S5, K5 og R5.
- Straight flush, fem kort av samme type i stigende rekkefølge.

Sannsynligheten vil naturligvis variere med antall spillere og varianten av poker man spiller. I dette tilfellet skal vi anta at vi er første spiller, og får utdelt fem kort på en gang. Likesom med terningkast er sannsynligheten for å få en gitt pokerhånd antallet måter pokerhånden kan oppstå på, delt på antallet kombinasjoner av fem kort fra vanlig kortstokk. Vi skal se på pokerhendene merket med $(*)$, og følgende beregninger benytter seg ekstensivt av multiplikasjonsprinsippet og uordnet utvalg uten tilbakelegging.

**Ett par.** Vi observerer at ett par består av to forskjellige typer med samme nummer, og merker oss at det er $\binom{4}{2}$ måter å få typene på og $\binom{13}{1}$ måter å få nummeret på. Da kan ett par oppstå på $\binom{4}{2}\binom{13}{1}$ forskjellige måter, men vi er også nødt til å ta de tre resterende kortene for å dekke alle muligheter med fem kort på hånda. De kan være hvilken som helst type med hvilket som helst nummer, utenom ett (det paret er i). Dermed er det $\binom{4}{1}^3$ måter å få typene på og $\binom{12}{3}$ måter å få nummerene på. Da er sannsynligheten for å få ett par i fem kort fra en vanlig kortstokk gitt ved

$$\frac{\binom{13}{1}\binom{4}{2}\binom{12}{3}\binom{4}{1}^3}{\binom{52}{5}} = \frac{13 \cdot 6 \cdot 220 \cdot 64}{2598960} \approx 0.4226$$

**Tre like.** Tilsvarende som i det foregående tilfellet observerer vi at tre like består av tre forskjellig typer med samme nummer. Det er $\binom{4}{3}$ måter å få typene på, og $\binom{13}{1}$ måter å få nummeret på. De to resterende kortene kan bestå av hvilken som helst type og hvilket som helst nummer utenom ett (det de tre like er i). Det gir oss $\binom{4}{1}^2$ måter å få typene på og $\binom{12}{2}$ måter å få nummerene på. Da er sannsynligheten for å få tre like i fem kort fra en vanlig kortstokk gitt ved

$$\frac{\binom{13}{1}\binom{4}{3}\binom{12}{2}\binom{4}{1}^2}{\binom{52}{5}} = \frac{13 \cdot 4 \cdot 66 \cdot 16}{2598960} \approx 0.0211$$

**Fullt hus.** For å beregne sannsynligheten for å få et fullt hus, kan vi benytte våre tidligere resultater med en liten endring. Fra det forrige tilfellet vet vi at det er $\binom{13}{1}\binom{4}{3}$ måter å få tre like kort. De to siste kortene må være ett par, men de kan ikke ha samme nummer som de tre like. Det gir oss $\binom{12}{1}\binom{4}{2}$ måter å få ett par. Da er sannsynligheten for å få et fullt hus (ett par og tre like) i fem kort fra en vanlig kortstokk gitt ved

$$\frac{\binom{13}{1}\binom{4}{3}\binom{12}{1}\binom{4}{2}}{\binom{52}{5}} = \frac{13 \cdot 4 \cdot 12 \cdot 6}{2598960} \approx 0.0014$$

Det kommer klart frem av beregningene at sannsynligheten varierer drastisk med de forskjellige pokerhendene, og det er utvilsomt godt med kjennskap til denne fordelingen hvis man har tenkt å vinne.

## 3.2 Bursdagsparadokset

Bursdagsparadokset er en velkjent problemstilling med et overraskende svar, og dermed et godt eksempel på sannsynlighetsregningens slagkraft. Det er 23 studenter som tar MAT3010/MAT4010. Hva er sannsynligheten for at minst to personer har bursdag på samme dag?

Den uerfarne sannsynlighetsregneren vil som oftest prøve å løse problemet direkte. Hver person har bursdag på én av 365 dager, og hvis alle er oppstilt på en linje så kan man se på sannsynligheten for at de to første har bursdag på samme dag, de to neste og så videre. Når man har gått igjennom alle $\binom{23}{2}$ kombinasjoner av to personer, så må man se på alle kombinasjoner av tre personer og så videre. Det er klart at dette medfører omfattende beregninger.

Vi skal i motsetning benytte oss av egenskap F, fordi det er mye lettere å beregne sannsynligheten for at ingen personer har bursdag på samme dag. Hvis alle går ut fra auditoriet og vi slipper inn én og én, så kan den første har bursdag på hvilken som helst dag: $\frac{365}{365}$. Den andre personen kan ha bursdag på hvilken som helst dag, utenom den dagen den første personen har bursdag: $\frac{364}{365}$. Den tredje: $\frac{363}{365}$, og slik fortsetter det for de resterende personene. Siden bursdager er uavhengige hendelser, så kan vi finne sannsynligheten for at ingen har bursdag på samme dag ved å multiplisere sannsynlighetene ovenfor. Det gir oss uttrykket

$$
\begin{aligned}
P(\text{ingen har bursdag på samme dag}) &= \frac{365}{365} \cdot \frac{364}{365} \cdots \frac{343}{365} \\
&= \frac{365 \cdot 364 \cdots (365 - 23 + 1)}{365^{23}} \approx 0.493
\end{aligned}
$$

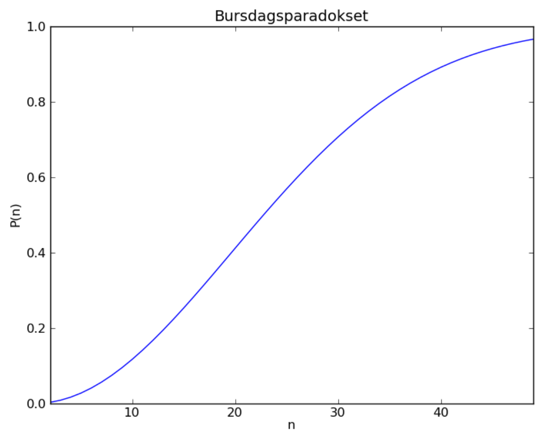
Da er sannsynligheten for at minst to personer har bursdag på samme dag gitt ved

$$
\begin{gathered}
P(\text{minst to har bursdag på samme dag}) = \\
1 - P(\text{ingen har bursdag på samme dag}) \approx 1 - 0.493 = 0.507
\end{gathered}
$$

Resultatet er overraskende, men skyldes rett at det er vanskelig å forestille seg alle kombinasjonene. Vi kan generalisere utregningene ovenfor til

$$
P(n) = 1 - \frac{365 \cdot 364 \cdots (365 - n + 1)}{365^n}
$$

som gir oss sannsynligheten for at minst to av $n$ personer har bursdag på samme dag. Det kan benyttes til å regne ut sannsynlighetsfordelingen til funksjonen, som vist i figur 5.




Figur 5: Sannsynlighetsfordelingen i bursdagsparadokset.

| n | 2 | 3 | 14 | 15 | 22 | 23 | 31 | 32 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| P(n) | 0.003 | 0.008 | 0.223 | 0.253 | 0.476 | 0.507 | 0.730 | 0.753 |

Figur 6: Tabell over sannsynlighetsfordelingen i bursdagsparadokset.

Figuren viser hvordan sannsynligheten vokser med antall personer, og det er helt klart at det ikke er lineært. For å analysere problemstillingen ytterligere, kan vi lage en tabell. Tabell 6 inneholder de mest interessante verdiene. Der kan vi se at sannsynligheten for at minst to personer har bursdag på samme dag er over 0.25 først ved 15 personer, 0.5 ved 23 personer og 0.75 ved 32 personer.

## 3.3 Medisin

I den siste anvendelsen skal vi se hvordan betinget sannsynlighet kan benyttes i medisin. En behandling for pasienter med hjertesvikt er digitalisterapi. Ulempen med behandlingen er at pasientene kan bli digitalisforgiftet. Det kan være krevende å diagnostisere forgiftning, for eksempel ved at det er dyrt, krever spesielt utstyr eller tar lang tid. I motsetning er det mye mindre krevende å måle blodkonsentrasjon. Det ble derfor gjennomført en studie der man undersøkte forholdet mellom blodkonsentrasjon og forgiftning, med håp om at blodkonsentrasjon kunne si noe om forgiftning. Under er en forenklet tabell med resultatene fra undersøkelsen, der følgende notasjon har blitt brukt:

- $T+$: høy blodkonsentrasjon
- $T-$: lav blodkonsentrasjon
- $D+$: forgiftet
- $D-$: ikke forgiftet

| | $D+$ | $D-$ | Totalt |
|---|---|---|---|
| $T+$ | 0.185 | 0.104 | 0.289 |
| $T-$ | 0.133 | 0.578 | 0.711 |
| Totalt | 0.318 | 0.682 | 1 |

Figur 7: Resultatene fra undersøkelsen med relative tall.

For eksempel har 31.8% av pasientene høy blodkonsentrasjon, og 18.5% har høy blodkonsentrasjon og er forgiftet. Hvis vi antar at de relative størrelsene er representative for pasienter som ikke var med i undersøkelsen, så kan vi benytte resultatene til hjelp for å diagnostisere om de er forgiftet eller ei.

Fra tabellen vet vi at kun 28.9% av pasientene er forgiftet, og for helsemyndigheter med begrensede ressurser kan det være nyttig å vite hvilke pasienter som skal prioriteres for en full diagnose. Ved å benytte betinget sannsynlighet, kan vi finne sannsynligheten for at en pasient er forgiftet gitt han har høy blodkonsentrasjon.

$$P(D+|T+) = \frac{P(D+\cap T+)}{P(T+)} = \frac{0.185}{0.289} = 0.640$$

Tilsvarende kan vi finne sannsynligheten for at en pasient ikke er forgiftet gitt at han ikke har høy blodkonsentrasjon.

$$P(D-|T-) = \frac{P(D-\cap T-)}{P(T-)} = \frac{0.578}{0.711} = 0.813$$

Siden det er langt mindre ressurskrevende å gjennomføre en blodkonsentrasjonsprøve, så kan helsemyndighetene enkelt prioritere pasienter med høy blodkonsentrasjon foran pasienter med lav blodkonsentrasjon, før de får en full diagnose. I ytterste tilfellet kan dette redde liv.