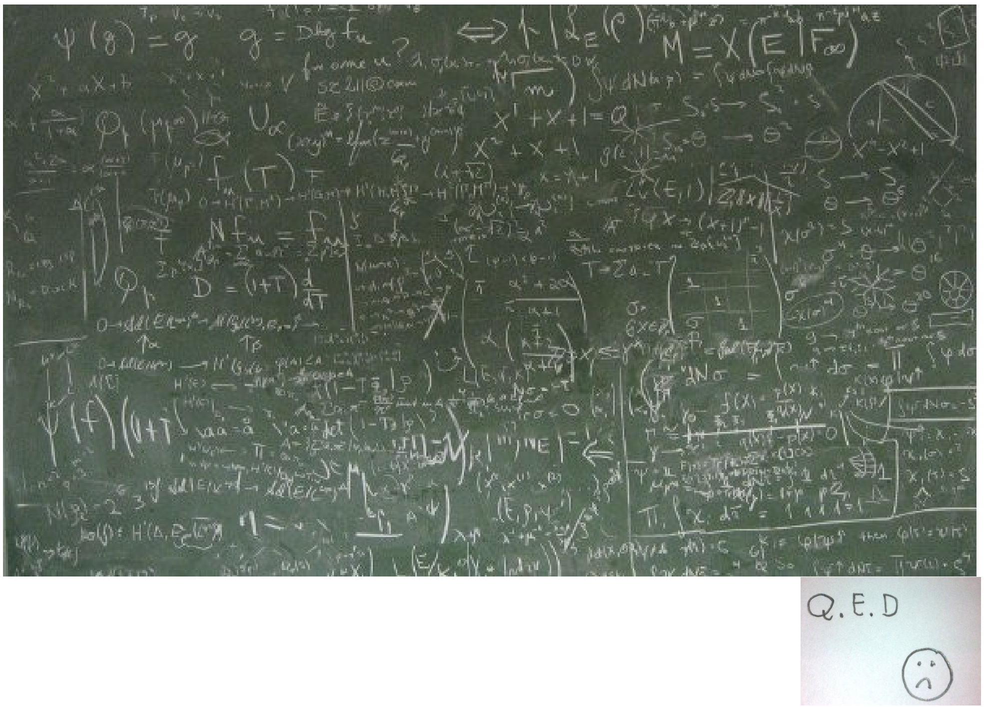
MAT3010

Rapport - skoleprosjekt

Gruppe $\mathbb{R}^3$



Figur 1: Slik kan en elev oppfatte lærerens skriblerier på tavlen under en mattetime.

> "Any fool can know. The point is to understand." – Albert Einstein

Av: Randi Vikhagen Gjeitnes, Heidi Servan & Peder Wessel

4. april 2014

Innhold

Forord

Denne rapporten er et resultat av et skoleprosjekt i emnet MAT3010/MAT4010 "Matematikk, skole og kultur" ved Universitetet i Oslo. Et skoleprosjekt i dette emnet skal ta for seg matematiske problemstillinger og utfordrende temaer innen matematikk som undervises på videregående skole, og utdypinger av disse. Dette skoleprosjektet tar utgangspunkt i kompetansemål for geometri i faget Matematikk R2 i den videregående skolen. Fokuset er på romgeometri og utvalgte begrep og beregninger innen romgeometri. Rapporten tar først for seg definisjoner og utvalgte begrep innen romgeometri, med fokus på vindskeive linjer. Beregninger og utledninger for blant annet skalarprodukt, vektorprodukt og avstand mellom linjer blir deretter presentert. Videre sees det på hvordan de ulike lærebøkene for emnet Matematikk R2 tolker læreplanmålene/kompetansemålene, og sammenligning av lærebøkene. Rapporten avsluttes med en oppsummering.

Kapittel 1

Romgeometri

Romgeometri, som også blir kalt stereometri, er den del av geometrien som omhandler figurer i det tredimensjonale rommet. Geometri, som er en gren av matematikken, omhandlet opprinnelig romstørrelser, dvs. punkter, linjer, kurver, flater og legemer, og deres beliggenhet, form og størrelse. Etterhvert har imidlertid geometrien utviklet seg ut over denne opprinnelige rammen, og omfatter i moderne matematikk mange teorier som ikke direkte kan anskueliggjøres som egenskaper ved vanlige romstørrelser, men som likevel tradisjonsmessig regnes til geometrien. Dette kan enten være på grunn av den historiske utviklingen eller på grunn av deres logiske slektskap med rent geometriske teorier.[1]

1.1 Kompetansemål

Ifølge Utdanningsdirektoratet er kompetansemålene for geometri i faget "Matematikk R2" i videregående skole følgende:

> "Mål for opplæringen er at eleven skal kunne:
>
> - utføre beregninger med tredimensjonale vektorer som er representert både geometrisk og på koordinatform
> - bruke og tolke skalar- og vektorproduktet i beregning av avstander, vinkler, areal og volum
> - bruke vektorregning til å finne liknings- og parameterframstillinger til linjer, plan og kuleflater
> - beregne lengder, vinkler og arealer i legemer avgrenset av plan og kuleflater "

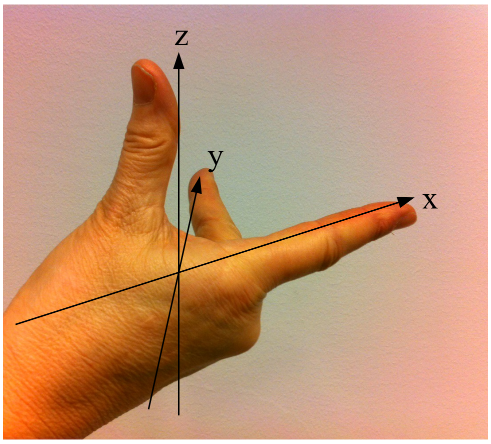
[1] `http://snl.no/geometri`, fagansvarlig Jon Eivind Vatne, dato 07.03.2014)

1.2 Utvalgte begreper og beregninger

Romgeometri (3D) er vanskeligere å forstå enn plangeometri (2D), siden 3D foregår i rommet og har da en ekstra dimensjon. Vektorregning står sentralt i geometriske beregninger, og forståelse av vektorregning er viktig. Videre er vindskeive linjer noe vi skal se nærmere på her, samt avstanden mellom disse. Beregninger og utledninger av formler kommer i kapittel 4.

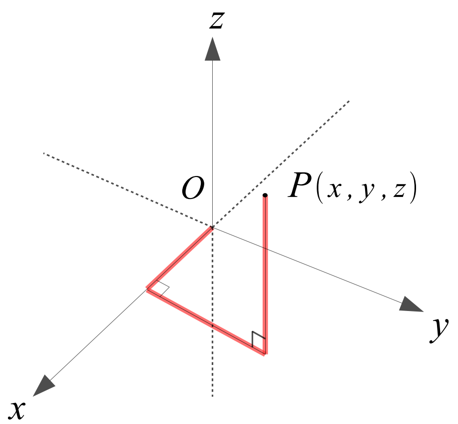
1.3 Kartesiske koordinater i rommet i $\mathbb{R}^3$

For å spesifisere punkter i rommet(3D), trenger vi et referansepunkt, O, kalt origo. Gjennom O trekker vi 3 gjensidig vinkelrette linjer og kaller dem x-, y- og z-aksen. I matematikk bruker man et høyrehåndssystem. I høyrehåndssystemet er z-aksen langs tommelfingeren som peker oppover, y-aksen er langs langfingeren, x-aksen er langs pekefingeren. Alle tre aksene går i positiv retning. Koordinatplanene (planene som går langs xy, xz og yz) deler rommet i 8 regioner, dvs. at planene krysser hverandre.

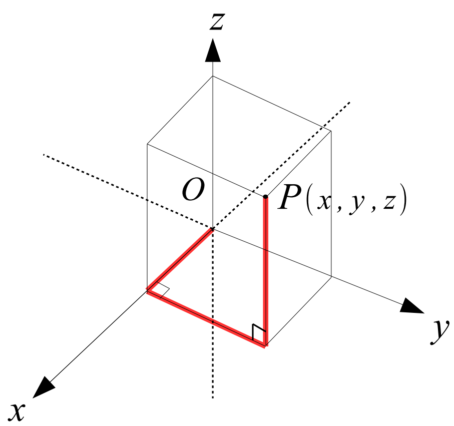


Figur 1.1: Slik kan man bruke høyrehånden til å finne hvor aksene skal plasseres i et høyrehåndssystem.

For å visualisere det 3-dimensjonale punktet på vårt to-dimensjonale papir, er det nyttig å tegne et rektangulært prisme, en boks, med origo som utgangspunkt.



Figur 1.2: Et punkt i $\mathbb{R}^3$ der de rød linjene beskriver en skalering av enhetsvektoren(se kapittel om vektorprodukt).



Figur 1.3: Boksen kan beskrives med koordinater i et 3-dimensjonalt kartesisk koordinatsystem. Punktet $P(x, y, x)$ kan være et hjørne i et prisme.

Vektorer

En vektor kan bli brukt til å beskrive en fysisk kvantitet, som fart eller kraft, som både har en størrelse og en retning. På denne måten kan man for eksempel beskrive hvor stor farten er, og i hvilken retning den virker, ved et gitt tidspunkt. I matematikken gjør vi gjerne beregninger med vektorer uten at de står for en spesiell egenskap, men vi sier likevel at vektoren har størrelse og retning. Hvis du har et punkt A og et punkt B og drar en linje mellom disse, får du linjestykket AB. Vektoren fra A til B skriver vi som $\overrightarrow{AB}$.

Vi kan gjøre beregninger med flere vektorer, og beskrive avstander og retninger mellom vektorene. Det finnes egne regneregler i vektorregning som løser slike utfordringer. Vi kan også ha vektorer i det 3-dimensjonale rom (3D), altså rom som har lengde, bredde og høyde. I matematikken regner vi også på vektorer i n-dimensjonale rom, altså rom som har flere dimensjoner enn lengde, bredde og dybde. Disse kan vi ikke se for oss, men vektorregning gjør at vi likevel kan regne med dem.[2] I faget Matematikk R1 på videregående skole, er geometri og vektorer i planet del av kompetansemålene. R1 tar altså for seg vektorer i det 2-dimensjonale plan (2D). R2 bygger på R1, og da på videre bruk av begrepet vektor, men her i det 3-dimensjonale rom (3D). Vektorregning i 3D kan benytte seg av mange av de samme reglene som ved vektorregning i 2D, hovedforskjellen er at i 3D har man en ekstra dimensjon.

[2]Kilde: `http://www.matematikk.org/oss.html?tid=102306`

1.4 Parallelle og vindskeive linjer

Ved beskrivelse av vindskeive linjer tar vi utgangspunkt i definisjonen av en linje. Euklids definisjon er at en linje er “lengde uten bredde” og “en rett linje er en linje som ligger jevnt på sine punkter”. Videre sier Euklids postulater at mellom to punkter kan trekkes en rett linje, og at en rett linje kan forlenges ubegrenset.

I $\mathbb{R}^2$ kan to linjer være:

- Parallelle (de vil aldri skjære hverandre)
- Ikke parallelle (de vil skjære hverandre)

I $\mathbb{R}^3$ kan to linjer være:

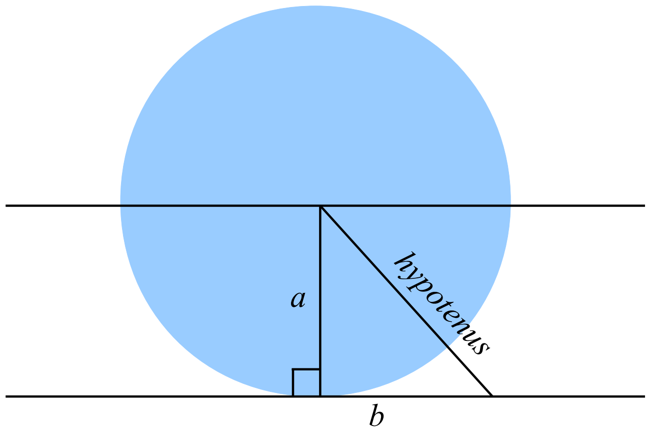
- Parallelle (de vil aldri skjære hverandre, men de ligger da i samme plan, 2D)
- Ikke parallelle: de vil skjære hverandre hvis de ligge i samme plan,
    - men hvis de ikke ligger i samme plan vil linjene ikke skjære hverandre; de to linjene er da vindskeive linjer.

Ved sammenligning av to parallelle og to vindskeive linjer er likheten at linjene ikke skjærer hverandre. Forskjellen er at parallelle linjer ligger i samme plan (hvis to linjer er parallelle i $\mathbb{R}^3$, kan vi danne et plan mellom de, slik at de da vil ligge i samme plan), mens vindskeive linjer ligger ikke i samme plan. Det er ikke mulig å danne et plan mellom to vindskeive linjer, ergo de ligger ikke i samme plan. To linjer i planet vil normalt skjære hverandre. Det er stor sjanse for at de ikke er parallelle. Sannsynligheten for at to linjer skjærer hverandre i rommet er 0. To linjer i rommet vil altså normalt være vindskeive (“Det er normalt å være skeiv i rommet”).

1.5 Avstand mellom linjer

En avstand mellom to linjer defineres som den korteste avstanden mellom disse. Med utgangspunkt i Pytagoras’ læresetning kan vi si at den korteste avstanden mellom to linjer er langs en forbindelseslinje som står vinkelrett på begge linjene. Dette gjelder både parallelle og vindskeive linjer. Ifølge Pytagoras’ læresetning vil en katet alltid være kortere enn hypotenusen.

"*Pytagoras læresetning:
I en rettvinklet trekant er summen av kvadratene på katetene lik kvadratet på hypotenusen.*"



Figur 1.4: a og b er kateter i en trekant, der a er den korteste avstanden til linjen. Den korteste avstanden, a, er langs en forbindelseslinje som står vinkelrett på begge linjene (kateten som forbinder linjene). Sirkelen i figuren illustrerer det samme; siden en sirkel har konstant radius, vil en hypotenus (en forbindelseslinje som ikke står vinkelrett på begge linjene) alltid være lengre enn kateten (radiusen) som står vinkelrett på begge linjene.

Kapittel 2

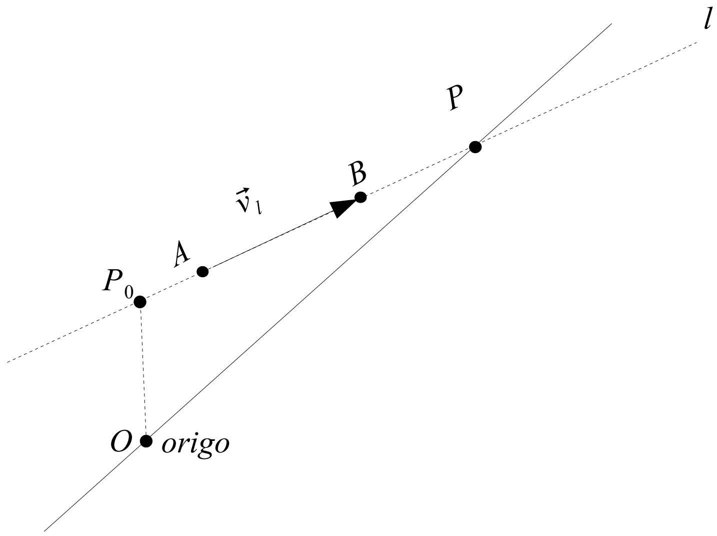
Sentral terminologi

I denne gjennomgangen skal vi se på følgende termer, som er sentrale videre i beregninger innen romgeomtri.

- Parametriserte linjer
- Retningsvektorer
- Vektorprodukt (også kalt kryssprodukt)
- Skalarprodukt (også kalt prikkprodukt)

2.1 Parameter -og vektorframstilling for rette linjer

Vi har en rett linje l, som er entydig bestemt av to gitte punkter A og B:



Figur 2.1: En linje l i rommet, med retningsvektor $\vec{v}_l$ og posisjonsvektoren $\vec{OP}$. P_0 er et vilkårlig valgt punkt.

Retningsvektoren for l: $\overrightarrow{v}_l = [a, b, c]$. (Bokstaven v er valgt for å angi at det også er en fartsvektor. Hastighet betyr *velocity* på engelsk.). Og videre er

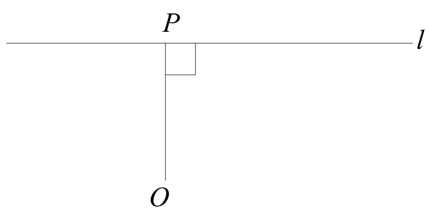
$$\overrightarrow{v}_l = B(x_1, y_1, z_1) - A(x_0, y_0, z_0) = [a, b, c]$$

Vi finner punktet P slik

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OP_0} + \overrightarrow{v}_l \cdot t$$

der $\overrightarrow{P_0P} \parallel \overrightarrow{v}_l$.

Vi kan variere t (t er altså en variabel) og slik finne et punkt P som passer til det vi vil vise, f.eks. når vi skal finne hvilken t som gjør at $\overrightarrow{OP}$ står vinkelrett på l.



Figur 2.2: Punktet P er valgt slik at det $\vec{OP}$ står vinkelrett på l.

Vektorframstillingen for en rett linje i $\mathbb{R}^3$:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OP} &= [x_0, y_0, z_0] + [a, b, c] \cdot t \\ &= [x_0 + at, y_0 + bt, z_0 + ct]\end{aligned}$$

Parameterframstillingen for en rett linje i $\mathbb{R}^3$:

$$x = x_0 + at, y = y_0 + bt, z = z_0 + ct$$

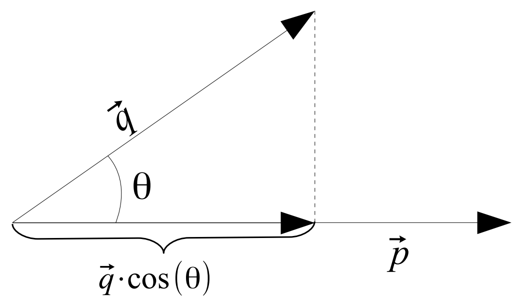
2.2 Skalarprodukt

Skalarpoduktet – også kalt prikkproduktet – kan brukes for å beregne vinkelen mellom to vektorer.

Skalarproduktet av vektorer $\vec{p}$ og $\vec{q}$ er definert som:

$$\vec{p} \cdot \vec{q} = |\vec{p}| \cdot |\vec{q}| \cos \theta \tag{2.1}$$

der θ er vinkelen mellom vektorene.



Figur 2.3: Forholdet mellom to vektorer med vinkelen mellom dem.

Koordinatene til $\vec{p}$ og $\vec{q}$ er $\vec{p} = [p_1, p_2, p_3]$ og $\vec{q} = [q_1, q_2, q_3]$. Vi har koordinatformelen for skalarproduktet:

$$\vec{p} \cdot \vec{q} = p_1 \cdot q_1 + p_2 \cdot q_2 + p_3 \cdot q_3$$

som blir et reelt tall (en skalar). For å utlede dette tar vi for oss enhetsvektorene som står vinkelrett på hverandre (se figur 2.6). Vi har:

$$\vec{e}_x \cdot \vec{e}_x = |\vec{e}_x|^2 \cdot \cos 0 = 1 \cdot 1 = 1$$

Følgelig er

$$\vec{e}_y \cdot \vec{e}_y = \vec{e}_z \cdot \vec{e}_z = 1$$

Videre ser vi at:

$$\vec{e}_x \cdot \vec{e}_y = 1 \cdot 1 \cdot \cos 90^\circ = 0$$

Følgelig er

$$\vec{e}_x \cdot \vec{e}_z = \vec{e}_y \cdot \vec{e}_z = 0$$

Enhver vektor kan skrives som en lineærkombinasjon av enhetsvektorene:

$$\vec{p} = (p_1 \vec{e}_x + p_2 \vec{e}_y + p_3 \vec{e}_z) \qquad \text{og} \qquad \vec{q} = (q_1 \vec{e}_x + q_2 \vec{e}_y + q_3 \vec{e}_z)$$

Ved å bruke resultatene over blir skalarproduktet av disse vektorene

$$\vec{p} \cdot \vec{q} = p_1 q_1 + p_2 q_2 + p_3 q_3$$

Videre kan vi dedusere følgende identiter:

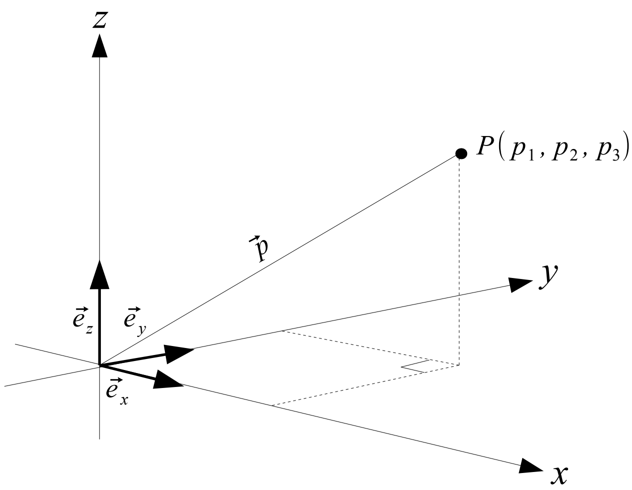
Vinkelrette vektorer: $\vec{p} \perp \vec{q} \iff \vec{p} \cdot \vec{q} = 0$

Lengden av en vektor: $|\vec{p}| = \sqrt{\vec{p}^2} = \sqrt{p_1^2 + p_2^2 + p_3^2}$

Vinkelformen får vi ut fra likning 2.1:

$$\cos\theta = \frac{\overrightarrow{p} \cdot \overrightarrow{q}}{|\overrightarrow{p}||\overrightarrow{p}|}$$

2.3 Vektorproduktet



Figur 2.4: En visualisering av enhetsvektorer i et kartesisk koordinatsystem og vektoren $\vec{p}$. I dette tilfellet er $\vec{p}$ også en posisjonsvektor som er utspent fra origo til punktet P.

Enhetsvektorer

$\overrightarrow{e_x}$ i figure 2.4 har lengde 1 langs x-aksen, tilsvarende for e_y og e_z. Vi har i koordinatsystemet tegnet inn vektoren $\overrightarrow{p}$. Vi kan gjøre tilsvarende for en vektor $\overrightarrow{q}$.

$\overrightarrow{p}$ og $\overrightarrow{q}$ er lineære kombinasjoner [1]

$$\overrightarrow{p} = (p_1\overrightarrow{e}_x + p_2\overrightarrow{e}_y + p_3\overrightarrow{e}_z) \qquad ; \qquad \overrightarrow{q} = (q_1\overrightarrow{e}_x + q_2\overrightarrow{e}_y + q_3\overrightarrow{e}_z)$$

[1] Hvis to vektorer ligger i planet, i $\mathbb{R}^2$, og de ikke er parallelle kan de multipliseres med en konstant og uttrykke alle vektorer i planet - vektorene sies å være lineært uavhengige. Tilsvarende kan alle vektorer i rommet skrives som en lineær kombinasjon av tre lineært uavhengige vektorer.

Koordinatene til punktene P og Q er følgelig er $P = [p_1, p_2, p_3]$ og $Q = [q_1, q_2, q_3]$ (husk: $\vec{p} = \overrightarrow{OP}$ og $\vec{q} = \overrightarrow{OQ}$).

2.4 Utledning av vektorproduktet

Vektorproduktet av to vektorer $\vec{p} \times \vec{q}$ blir en ny vektor,

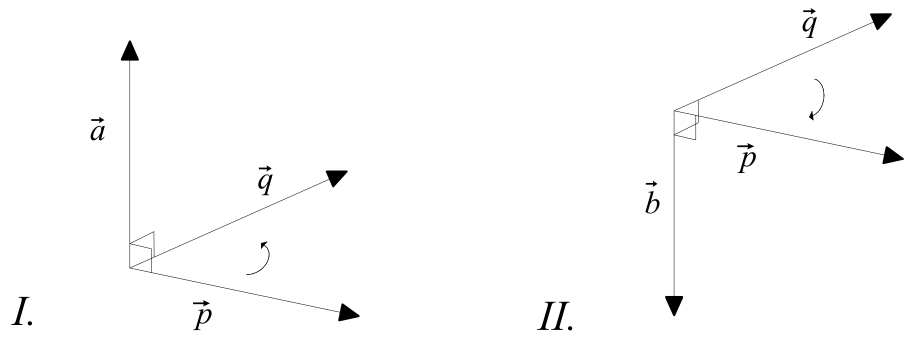
$$\vec{p} \times \vec{q} = [p_2q_3 - p_3q_2, p_3q_1 - p_1q_3, p_1q_2 - p_2q_1] \tag{2.2}$$

og lengden til den nye vektoren.

$$|\vec{p} \times \vec{q}| = |\vec{p}||\vec{q}| \sin\theta \tag{2.3}$$

der θ er vinkelen mellom $\vec{p}$ og $\vec{q}$. Retningen til den nye vektoren $\vec{p} \times \vec{q}$ er gitt ved at den skal stå vinkelrett både på $\vec{p}$ og $\vec{q}$. Den blir derfor en normalvektor til planet gjennom disse vektorene. Husk at i $\mathbb{R}^3$, så brukes høyrehåndssystemet.

Hvorfor er vektorproduktet og lengden til vektorproduktet så forskjellige? Det skal vi forklare i de kommende avsnitt.



Figur 2.5: Normalvektorene $\vec{a}$ og $\vec{b}$ står vinkelrett på $\vec{p}$ og $\vec{q}$. Her vises hvorfor vektorproduktet ikke er kommutativt. Figur I representerer $\vec{a} = \vec{p} \times \vec{q}$ og II $\vec{b} = \vec{q} \times \vec{p} = -(\vec{p} \times \vec{q})$.

Figur 2.5 viser hvordan de nye vektorene $\vec{a}$ og $\vec{b}$ er produkter av ikke-kommutative[2] operasjoner – rekkefølgen er viktig i dette tilfellet.

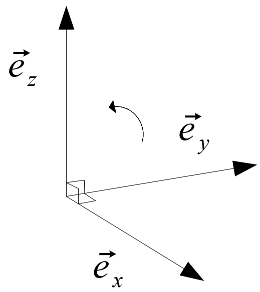
[2]Kommutativitet vil si at $a \cdot b = b \cdot a$, dvs. at faktorenes orden er likegyldig.

Hvis vi ser på formel 2.3 og setter vinkelen θ lik 0:

$$|\vec{p} \times \vec{q}| = |\vec{p}||\vec{q}| \sin 0 = 0 \tag{2.4}$$

Da er $\vec{p}$ og $\vec{q}$ parallelle – de har samme retning og vektorkoordinatene har felles multiplum.

Vi ser på enhetsvektorene ut fra denne definisjonen:



Figur 2.6: Denne figuren viser forholdet mellom enhetsvektorene. De står, som anvist, vinkelrett på hverandre.

Fra figur 2.6 ser vi følgende relasjoner:

$$\begin{array}{lll} \vec{e}_x \times \vec{e}_y = \vec{e}_z & og & \vec{e}_y \times \vec{e}_x = -\vec{e}_z \\ \vec{e}_y \times \vec{e}_z = \vec{e}_x & og & \vec{e}_z \times \vec{e}_y = -\vec{e}_x \\ \vec{e}_z \times \vec{e}_x = \vec{e}_y & og & \vec{e}_x \times \vec{e}_z = -\vec{e}_y \end{array}$$

Ved å bruke resultatet fra likning 2.4 kan følgelig vise at

$$\begin{aligned} \vec{e}_x \times \vec{e}_x &= 0 \\ \vec{e}_y \times \vec{e}_y &= 0 \\ \vec{e}_z \times \vec{e}_z &= 0 \end{aligned}$$

Regneregler for vektorer gir

$$s\vec{p} \times t\vec{q} = st \cdot (\vec{p} \times \vec{q})$$

Vektorproduktet blir:

$$\begin{aligned} \vec{p} \times \vec{q} &= [p_1, p_2, p_3] \times [q_1, q_2, q_3] \\ = p_1q_1 \underbrace{(\vec{e}_x \times \vec{e}_x)}_{0} &+ p_1q_2 \underbrace{(\vec{e}_x \times \vec{e}_y)}_{\vec{e}_z} + p_1q_3 \underbrace{(\vec{e}_x \times \vec{e}_z)}_{-\vec{e}_y} \\ + p_2q_1 \underbrace{(\vec{e}_y \times \vec{e}_x)}_{-\vec{e}_z} &+ p_2q_2 \underbrace{(\vec{e}_y \times \vec{e}_y)}_{0} + p_2q_3 \underbrace{(\vec{e}_y \times \vec{e}_z)}_{\vec{e}_x} \\ + p_3q_1 \underbrace{(\vec{e}_z \times \vec{e}_x)}_{\vec{e}_y} &+ p_3q_2 \underbrace{(\vec{e}_z \times \vec{e}_y)}_{-\vec{e}_x} + p_3q_3 \underbrace{(\vec{e}_z \times \vec{e}_z)}_{0} \end{aligned}$$

Det gir

$$\vec{p} \times \vec{q} = [p_2q_3 - p_3q_2, p_3q_1 - p_1q_3, p_1q_2 - p_2q_1] \tag{2.5}$$

Dette blir en normalvektor hvor

$$\begin{array}{lll} p_2q_3 - p_3q_2 & \text{er } x\text{-koordinaten} & = a \\ p_3q_1 - p_1q_3 & \text{er } y\text{-koordinaten} & = b \\ p_1q_2 - p_2q_1 & \text{er } z\text{-koordinaten} & = c \end{array}$$

som vi kan skrive som følgende

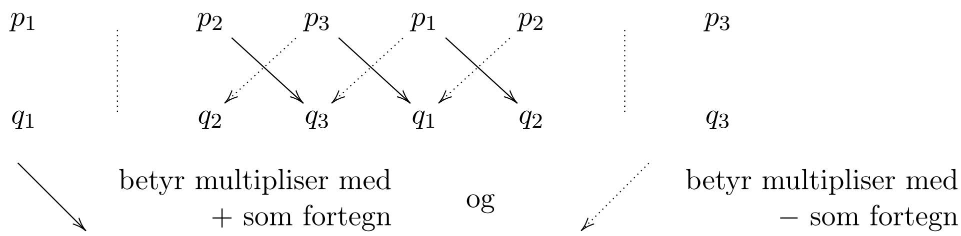
$$\vec{n} = [a, b, c] \tag{2.6}$$

2.5 Koordinatformelen for vektorproduktet

Koordinatformelen for vektorproduktet kan vi få ved å sette $\vec{p}$ og $\vec{q}$ i en 3×3 -matrise (i $\mathbb{R}^3$) og regne ut determinanten utviklet etter 1.rad:

$$\vec{p} \times \vec{q} = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ p_1 & p_2 & p_3 \\ q_1 & q_2 & q_3 \end{vmatrix}$$

En alternativ framgangsmåte:



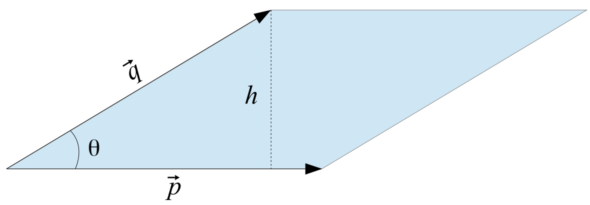
Det gir

$$\vec{p} \times \vec{q} = [p_2q_3 - p_3q_2, p_3q_1 - p_1q_3, p_1q_2 - p_2q_1]$$

som vi har sett i formel 2.2.

2.6 Sammenhengen mellom vektorprodukt og areal

Arealet av en trekant utspent av to vektorer:



Figur 2.7: Her vises trekanten som $\vec{p}$ og $\vec{q}$ utspenner, der θ er vinkelen mellom dem og $h = |\vec{q}| \sin\theta$ er høyden. Hele det blå området er parallellogrammet de utspenner.

Arealet til trekanten utspent av vektorene $\vec{p}$ og $\vec{q}$

$$A_t = \frac{1}{2}|\vec{p}||\vec{q}|\sin\theta$$

der $|\vec{p}|$ er grunnlinjen og $|\vec{q}|\sin\theta$ er høyden.

Sammenligner vi med definisjonen av lengden til vektorproduktet (likning 2.3) får vi:

$$A_t = \frac{1}{2}|\vec{p} \times \vec{q}| = \frac{1}{2}|\vec{p}||\vec{q}|\sin\theta \qquad (2.7)$$

Som gir arealet til den ene halvdelen til parallellogrammet vektorene utspenner. Det kan uttrykkes på to måter:

- vektorform
- koordinatform

som vi skal nærmere på nå

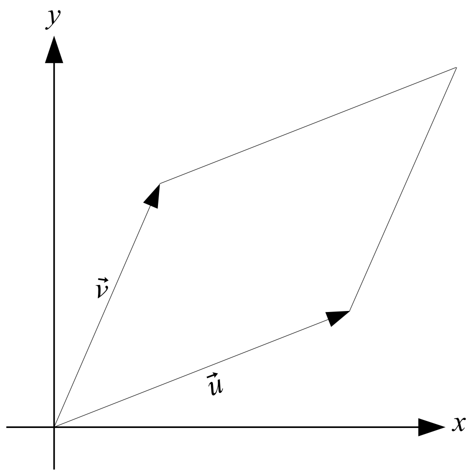
Vektorform

For å finne ut arealet til parallellogrammet to vektorer utspenner bruker vi likning 2.7 som er:

$$A_p = |\overrightarrow{p} \times \overrightarrow{q}| \qquad (2.8)$$

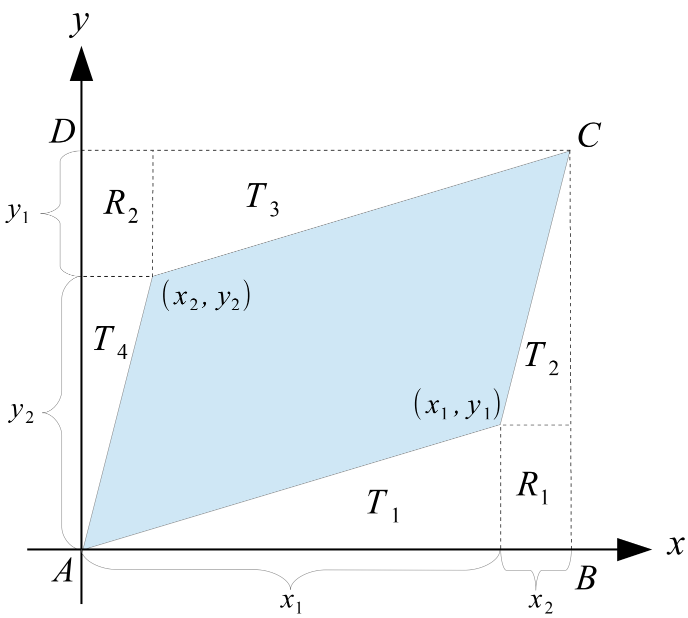
Koordinatform

Arealet av et parallellogram utspent av to vektorer kan også skrives på koordinatform, som vi skal se på nå:



Figur 2.8: Arealet av parallellogrammet dannet av vektorene $\vec{u}$ og $\vec{v}$ er lik absoluttverdien av determinanten, dvs. vektorproduktet til vektorene $\vec{u}$ og $\vec{v}$.

På koordinatform blir determinanten $|x_1y_2 - x_2y_1|$



Figur 2.9: Denne figuren er et eksempel på hvordan man finner ut arealet til et parallellogram ved å se på det som en del av rektangel, i et koordinatsystem.

Arealet av rektangelet $ABCD$ i figur 2.9:

$$A_r = (x_1 + x_2)(y_1 + y_2) = x_1y_1 + x_2y_1 + x_1y_2 + x_2y_2$$

For å få arealet av parallellogrammet, må vi trekke fra arealet til trekantene T_1, T_2, T_3 og T_4 og rektangelene R_1 og R_2:

$$T_1 = T_3 = \frac{x_1 \cdot y_1}{2} \qquad T_2 = T_4 = \frac{x_2 \cdot y_2}{2} \qquad R_1 = R_2 = x_2 \cdot y_1$$

Arealet av parallellogrammet:

$$\begin{aligned} A_p &= x_1y_1 + x_2y_1 + x_1y_2 + x_2y_2 - 2 \cdot \frac{x_1 \cdot y_1}{2} - 2 \cdot \frac{x_2 \cdot y_2}{2} - 2 \cdot x_2 \cdot y_1 \\ &= x_1y_2 - x_2y_1 \end{aligned}$$

Resultatet kan settes inn i en 2×2-matrise $\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}$ som gir determinanten $x_1y_2 - x_2y_1$. På vektorform:

$$A_p = |\vec{u} \times \vec{v}| = \left| \det \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{pmatrix} \right| \tag{2.9}$$

som blir et uttrykk for parallellogrammet utspent av vektorene $\vec{u}$ og $\vec{v}$.

Kryssproduktet av to vektorer gir en ny vektor i en tredje dimensjon - man går fra å ha to vektorer i $\mathbb{R}^2$ til å få en vektor normalt på planet (parallellogrammet) og lengden av den nye vektoren uttrykker arealet til vektorene i planet. Det kan virke litt kontraintuitivt, men hvis vi ser på absoluttverdien til matrisen kryssproduktet mellom $\vec{u}$ og $\vec{v}$ får vi

$$|\vec{u} \times \vec{v}| = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}$$

Ved å sette $\vec{e}_z = 0$, så får vi det som i likning 2.9. Dvs. av at vi opererer i xy-planet.

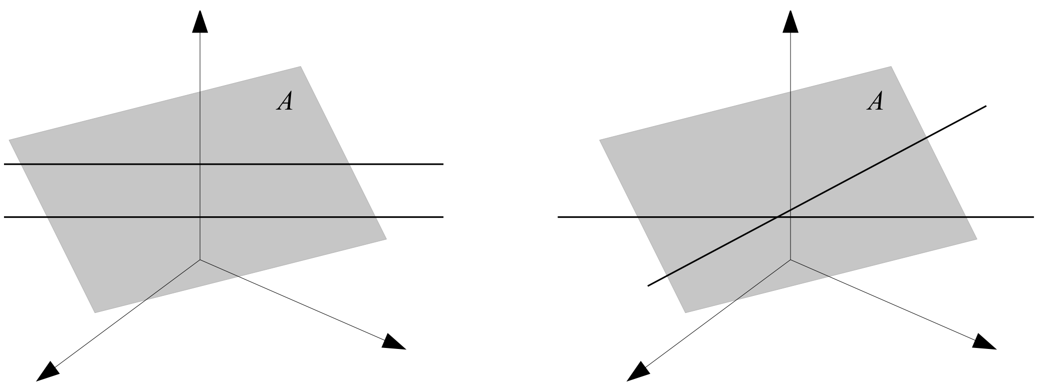
Kapittel 3

Avstanden mellom linjer i rommet

3.1 Linjer

I samme plan

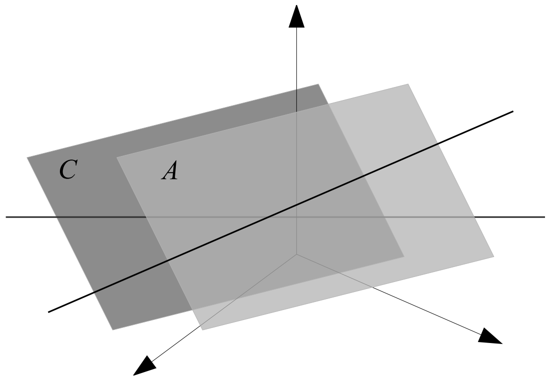
Parallelle linjer *Linjer som skjærer hverandre*



Figur 3.1: Linjer i samme plan A.

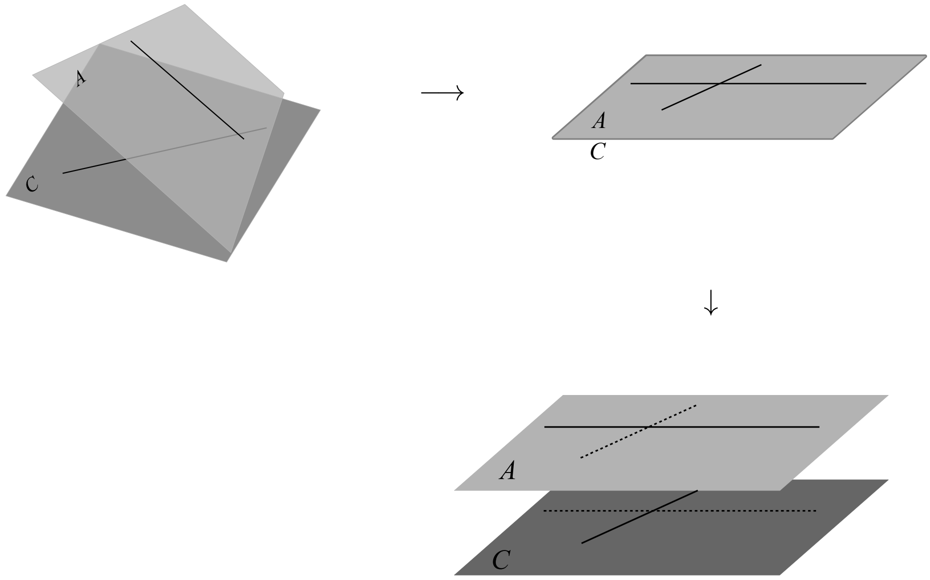
I forskjellige plan:

Vindskeive linjer



Figur 3.2: To rette linjer som ikke krysser hverandre eller er parallelle – de er altså vindskeive. De ligger da i hvert sine plan A og C.

Om vi parallellforskyver den ene linjen til den skjærer den andre, så kan de danne et nytt plan. Flytter vi linja tilbake og “drar” med oss planet vil de to linjene ligge i parallelle plan.



Figur 3.3: I utgangspunktet er ikke planene parallelle, men ved en parallellforskyvning av de to vindskeive linjene danner vi et nytt plan utspent av linjene. A og C er liggende parallelle plan. De striplete linjene er avskygninger av linjene etter at planene har blitt "dratt" tilbake.

Euklid definerte at en "linje er en lengde uten bredde" og "en rett linje er en linje som ligger jevnt på sine punkter"[1] med uendelig utstrekning. Det du har lært om vektorer i planet kan du enkelt overføre til romgeometrien - du må bare legge til en z-verdi. Koordinatene for et plan er på formen (x, y), mens i rommet blir de på formen (x, y, z). Linjer (og elementer) i rommet kan altså settes inn i et koordinatsystem der hvert punkt har tre verdier x, y, z.

- Parallelle og i samme plan vil derfor aldri skjære hverandre.
- Ikke-parallelle og i samme plan, og vil skjære hverandre
- Ikke-parallelle og ikke i samme plan og vil derfor aldri skjære hverandre – de er vindskeive.

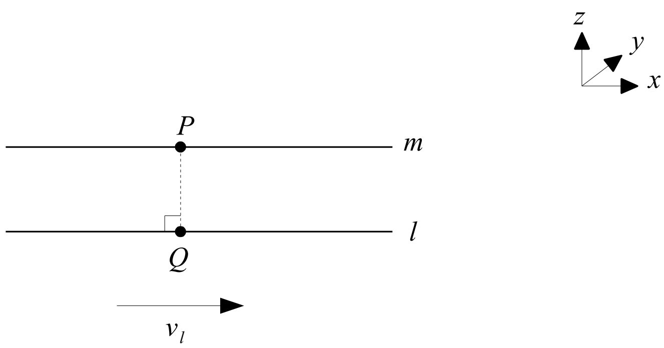
[1] `http://www.math.ntnu.no/~johana/MA2401-2007v/Euklids\%20definisjoner\%20og\%20antagelser.doc`

3.2 Avstand mellom to parallelle linjer

> **Definisjon**: To parallelle linjer er to linjer uten et felles punkt, som ikke skjærer hverandre, der avstanden mellom dem er konstant. De har altså parallelle retningsvektorer.

Det finnes 2 metoder å finne avstanden mellom parallelle linjer:

Metode 1



Figur 3.4: PQ er linjestykket mellom et punkt P på m og Q på l. PQ står vinkelrett på på m og l.

Vi har retningsvektoren $\vec{v}_l = [a, b, c]$ og parametriseringen til linjen l fra punktet $Q(x_0, y_0, z_0)$:

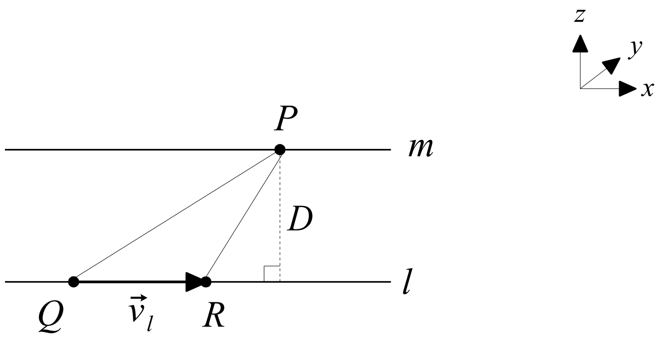
$$l : \begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \\ z = z_0 + ct \end{cases}$$

Da kan $\overrightarrow{PQ}$ uttrykkes ved hjelp av parameteren t.
Vi lar Q være punktet på l som ligger nærmest P. Da må $\overrightarrow{PQ}$ stå vinkelrett på l, og på $\vec{v}_l$:

$$\overrightarrow{PQ} \perp \vec{v}_l \ \Rightarrow \ \overrightarrow{PQ} \cdot \vec{v}_l = 0$$

Vi finner verdien av t som gjør at prikkproduktet blir 0 (se figur 1.4 på s. 8).

Metode 2



Figur 3.5: $\vec{v_l}$ er retningsvektoren utspent mellom punktene Q og R og D er den korteste avstanden mellom de to parallelle linjene m og l.

Fra to punkter på l har vi Q og $\overrightarrow{QR}$ som gir en retningsvektor for l. Da blir $\overrightarrow{QR} = \vec{v}_l$.

Vi ser på trekanten som dannes av punktene PQR. Den har arealet

$$A = \frac{1}{2} \underbrace{\text{grunnlinje}}_{|\overrightarrow{QR}|} \cdot \text{høyde} = \frac{1}{2}|\overrightarrow{QR}| \cdot h$$

Vi kan også regne ut arealet av trekanten PQR ved kryssproduktet

$$A = \frac{1}{2}|\overrightarrow{QP} \times \overrightarrow{QR}|$$

Om vi setter utrykkene lik hverandre:

$$|\overrightarrow{QR}| \cdot h = |\overrightarrow{QP} \times \overrightarrow{QR}|$$

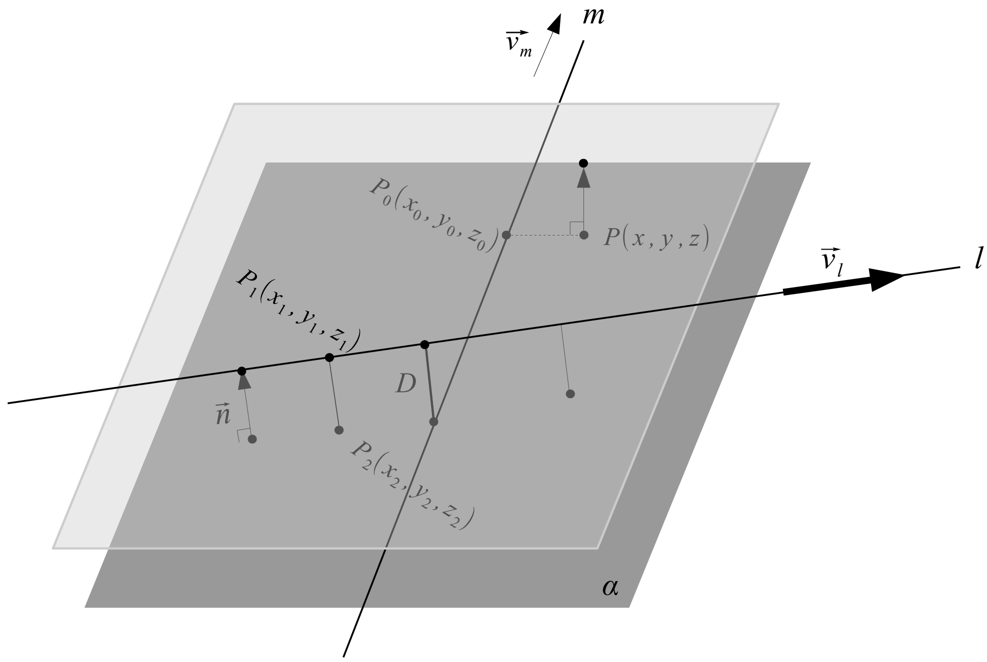
$$h = D = \frac{|\overrightarrow{QP} \times \overrightarrow{QR}|}{|\overrightarrow{QR}|} = \frac{|\overrightarrow{QP} \times \vec{v}_l|}{|\vec{v}_l|} \tag{3.1}$$

Dette er den korteste avstanden mellom de parallelle linjene.

3.3 Avstanden mellom vindskeive linjer

Den korteste avstanden mellom to rette, vindskeive linjer den måles langs en linje som står vinkelrett på begge linjene. Vi skal beregne denne avstanden på to måter; først en som viser at forbindelseslinjen står vinkelrett på de vindskeive linjene (metode 1) og så en ved bruk av parametriserte linjer (metode 2).

Metode 1



Figur 3.6: En tredimensjonal framstilling av linjene m og l, som ligger i parallelle plan. Da kan man lage et plan i deres utstrekning. D er avstanden (D for "distance") mellom planen og følgelig også mellom linjene.

Kryssproduktet av vektorene som spenner ut planet α

$$\vec{v}_l \times \vec{v}_m = \vec{n} = [a, b, c]$$

gir en vektor som står normalt på planet og på alle linjer som ligger i planet.

Vi har $P_0(x_0, y_0, z_0)$ på en linje m. $P(x, y, z)$ er et vilkårlig punkt i planet α.

$$\overrightarrow{P_0P} \cdot \vec{n} = 0$$

fordi $\overrightarrow{P_0} \perp \vec{n}$.

$$[x - x_0, y - y_0, z - z_0] \cdot [a, b, c] = 0$$

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0 \tag{3.2}$$

Som gir oss likningen for et plan som går gjennom punktet (x_0, y_0, z_0) og $\vec{n} = [a, b, c]$. Videre kan den forenkles

$$ax - ax_0 + by - by_0 + cz - cz_0 = 0$$

$$ax + by + cy - \underbrace{(ax_0 + by_0 + cz_0)}_{-d} = 0$$

$$ax + by + cz + d = 0 \tag{3.3}$$

Der d er et tall. Ethvert punkt i planet innsatt i (x, y, z) gir 0. Vi lar P_1 være et punkt på l.

$|\overrightarrow{P_1P_2}| = D$ som vi er ute etter. For å finne D må vi bruke skalarproduktet:

Skalarproduktet:

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = |\vec{A}||\vec{B}| \cdot \cos\theta$$

der θ er vinkelen mellom $\vec{A}$ og $\vec{B}$.

Vi har

$$\overrightarrow{P_1P_2} \parallel \vec{n} \iff \theta = 0$$

$$\overrightarrow{P_1P_2} \cdot \vec{n} \Rightarrow |\overrightarrow{P_1P_2}| \cdot |\vec{n}| \underbrace{\cos 0}_{\pm 1} = (\pm 1)D \cdot \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \tag{3.4}$$

Med koordinatregning:

$$[x_1 - x_2, y_1 - y_2, z_1 - z_2] \cdot [a, b, c] = ax_1 + by_1 + cz_1 - (ax_2 + by_2 + cz_2) \tag{3.5}$$

som gir

$$(\pm 1)D \cdot \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} = ax_1 + by_1 + cz_1 - (ax_2 + by_2 + cz_2) \tag{3.6}$$

Punktet $P_2(x_2, y_2, z_2)$ ligger i planet α og kan derfor settes inn i likningen for et plan (likning 3.3), så blir uttrykket lik 0. Altså blir

$$ax_2 + by_2 + cz_2 = -d$$

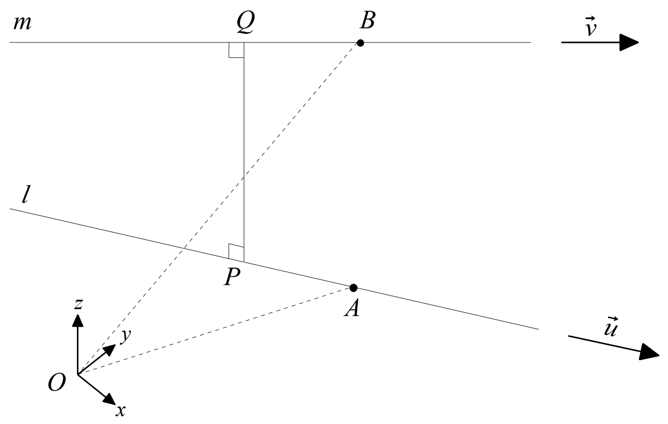
som vi setter inn i likning 3.6 og får:

$$(\pm 1)\ D \cdot \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} = ax_1 + by_1 + cz_1 + d$$

siden avstander har positive verdier, så bruker vi absoluttverditegn:

$$D = \frac{|ax_1 + by_1 + cz_1 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \tag{3.7}$$

Metode 2



Figur 3.7: To vindskeive linjer i rommet.

Vi ser på to linjer m og l med retningsvektorer $\vec{v}$ og $\vec{u}$. A og B er to kjente punkter. Vi uttrykker P på linjen l slik:

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + s\vec{u}\ \text{, der O er origo}$$

Og tilsvarende for linjen m:

$$\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OB} + t\vec{v}$$

Avstanden $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OQ}$, der $\overrightarrow{OQ}$ uttrykt ved parameteren s og $\overrightarrow{OP}$ ved t. Lengden til $\overrightarrow{PQ}$ er den korteste avstanden fra linjen m til l. Vi må bestemme s og t slik at $\overrightarrow{PQ}$ står vinkelrett på $\vec{u}$ og $\overrightarrow{PQ}$ står vinkelrett på $\vec{v}$. Da kan vi finne $|\overrightarrow{PQ}|$ ved å benytte oss av

$$\overrightarrow{PQ} \perp \vec{u} \iff \overrightarrow{PQ} \cdot \vec{u} = 0$$

$$\overrightarrow{PQ} \perp \vec{v} \iff \overrightarrow{PQ} \cdot \vec{v} = 0$$

Vi får da to likninger med to ukjente, s og t, som vi skal se et eksempel av nedenfor.

Vi vil bestemme avstanden mellom linjene gitt ved
l: $x = 1 + 2s \wedge y = s \wedge z = 1 - s$ og m: $x = 4 - t \wedge y = 1 + 4t \wedge z = 2t$

Linjene har retningsvektorene $\vec{u} = [2, 1, -1]$ og $\vec{v} = [-1, 4, 2]$.
$P = (1 + 2s, s, 1 - s)$ er et vilkårlig punkt på l, og $Q = (4 - t, 1 + 4t, 2t)$ er et vilkårlig punkt på m. Vi finner $\overrightarrow{PQ}$ uttrykt ved s og t.

$$\overrightarrow{PQ} = [4 - t - (1 + 2s), 1 + 4t - s, 2t - (1 - s)] = [3 - t - 2s, 1 + 4t - s, 2t - 1 + s]$$

Vi må nå finne verdier for s og t slik at $\overrightarrow{PQ}$ står vinkelrett på både l og m.
Da må $\overrightarrow{PQ}$ stå vinkelrett på retningsvektorene til l og m.
$\overrightarrow{PQ} \perp \vec{u}$ og $\overrightarrow{PQ} \perp \vec{v}$ gir

$\overrightarrow{PQ} \cdot \vec{u} = 0$ og $\overrightarrow{PQ} \cdot \vec{v} = 0$

$[3 - t - 2s, 1 + 4t - s, 2t - 1 + s] \cdot [2, 1, -1] = 0$ og

$[3 - t - 2s, 1 + 4t - s, 2t - 1 + s] \cdot [-1, 4, 2] = 0$

$6 - 2t - 4s + 1 + 4t - s - 2t + 1 - s = 0$ og $-3 + t + 2s + 4 + 16t - 4s + 4t - 2 + 2s = 0$

$8 - 6s = 0$ og $-1 + 21t = 0$

$s = \dfrac{4}{3}$ og $t = \dfrac{1}{21}$

Vi setter verdiene for s og t inn i uttrykket for $\overrightarrow{PQ}$. Det gir

$$\overrightarrow{PQ} = [3 - \tfrac{1}{21} - 2 \cdot \tfrac{4}{3}, 1 + 4 \cdot \tfrac{1}{21} - \tfrac{4}{3}, 2 \cdot \tfrac{1}{21} - 1 + \tfrac{4}{3}] = [\tfrac{2}{7}, \tfrac{-1}{7}, \tfrac{3}{7}]$$

$$|\overrightarrow{PQ}| = \sqrt{\left(\frac{2}{7}\right)^2 + \left(\frac{-1}{7}\right)^2 + \left(\frac{3}{7}\right)^2} = \sqrt{\frac{14}{49}} = \frac{\sqrt{14}}{7} = 0{,}535$$

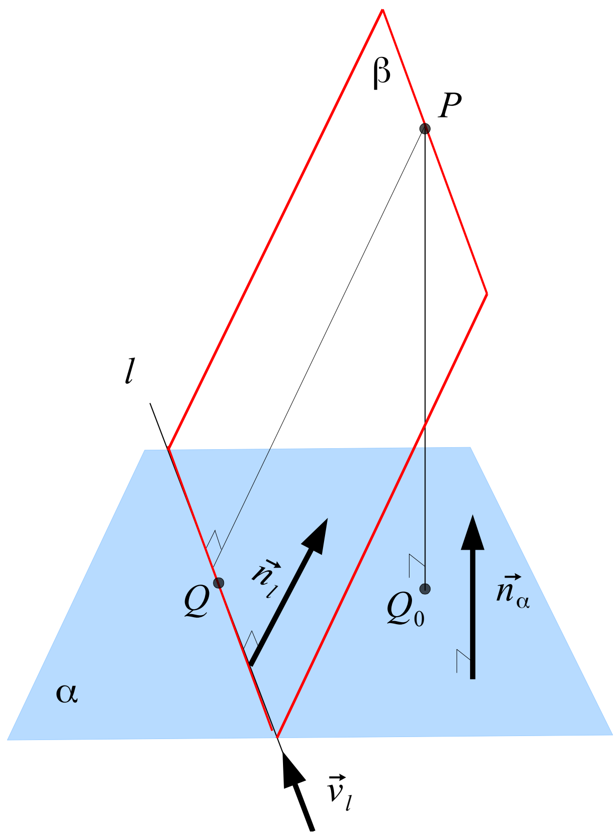
Avstanden mellom l og m er 0,535.

Figur 3.8: Et eksempel på hvordan man kan finne avstanden mellom vindskeive linjer. Det er hentet fra Aschehoug's lærebok i Matematikk R2 [1].

3.4 Sammenligning av avstandsformler

Vi vil sammenligne formlene for avstand fra punkt til linje og fra punkt til plan. Men først må vi se på skalarprodukter og projeksjoner.

Avstand fra punkt til plan



Figur 3.9: En visualisering av forholdet mellom et punkt P i rommet og et plan α, hvor den korteste avstanden er PQ_0. Avstanden mellom punktet P og linjen l kan finnes ut fra et vilkårlig valgt punkt Q på linjen og linjens retningsvektor $\vec{v_l}$. Linjen l ligger i et plan β som enten kan være i $\mathbb{R}^2$ eller $\mathbb{R}^3$.

Avstanden fra punkt til plan, har et gitt punkt $p(x, y, x)$ og normalvektoren til planet α, $\overrightarrow{v}_\alpha(a, b, c)$. ($\overrightarrow{n}_\alpha$ finnes ved vektorproduktet mellom to lineært uavhengige vektorer som spenner ut planet).

$$|\overrightarrow{PQ_0}| = \frac{|ax_1 + by_1 + cz_1 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = \frac{|\overrightarrow{PQ_0} \cdot \overrightarrow{n}|}{|\overrightarrow{n}|} \tag{3.8}$$

Q_0 er ikke angitt, men vi bruker under i utledningen at $\overrightarrow{PQ_0}$ er parallell med $\overrightarrow{n}_\alpha$ og Q_0 ligger i planet.

Avstand fra punkt til linje

Avstanden fra punkt til linje, når et punkt $P(x_1, y_1, z_1)$ er gitt og retningsvektoren til linjen l, $\vec{v}_l$ (se figur 3.9). Vi kan vise dette på to måter. Om l er en linje er en linje i $\mathbb{R}^3$ bruker vi gjerne uttrykket som inneholder vektorproduktet:

Avstanden fra et punkt til P til en linje som går gjennom punktet Q og har retningvektoren $\vec{v}$ er:

$$D = \frac{|\vec{QP} \times \vec{v}|}{|\vec{v}|} \tag{3.9}$$

Avstand fra punkt til plan
Avstanden fra punktet $P(x, y, z)$ til planet $ax + by + cz + d = 0$ er:

$$\frac{|ax_1 + by_1 + cz_1 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \tag{3.10}$$

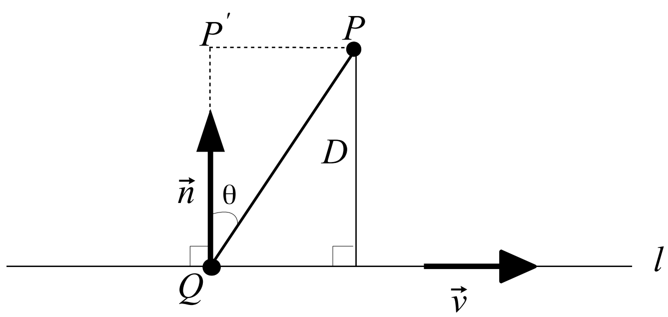
I figur **??** ser vi at

$$\frac{1}{2}|\overrightarrow{QR}| \cdot D = \frac{1}{2}|\overrightarrow{QP} \times \overrightarrow{QR}|$$

Der vi fra figur **??** har sett at $\overrightarrow{QR} = \vec{v}_l$. Avstanden mellom punkt og linje – D – utrykkes følgelig

$$D = \frac{|\overrightarrow{QP} \times \vec{v}_l|}{|\vec{v}_l|} \tag{3.11}$$

Når linjen ligger i planet blir det intuitivt ikke riktig å bruke vektorproduktet. Om vi har likningen for en linje i planet $ax + by + c = 0$, eller retningsvektor $\vec{v}$ vil vi angi $\vec{n} = [a, b]$

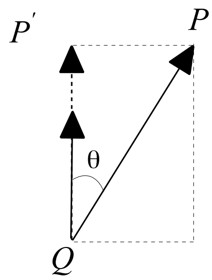


Figur 3.10: Her ser vi forholdet mellom normalvektoren og et vilkårlig valgt Q punkt på en linje l til et punkt P. $\vec{n}$ er normalvektor og $\vec{v}$ er retningsvektor.

Projeksjonen av $|\overrightarrow{QP}|$ på $\vec{n}$ gir $\overrightarrow{QP'}$, slik at $D = |\overrightarrow{QP'}$.

Vi bruker definisjonen av skalarproduktet:

$$\vec{n} \cdot \overrightarrow{QP} = |\vec{n}| \cdot \underbrace{|\overrightarrow{QP}| \cdot \cos\theta}_{|\overrightarrow{QP}|}$$



Figur 3.11: Her ser vi en projeksjon av vektoren $\vec{QP}$ til $\vec{QP'}$.

Fra figur 3.11 ser vi at

$$\overrightarrow{QP'} \cdot \vec{n} = |QP'| \cdot |\vec{n}| \cdot \underbrace{\cos 0}_{1}$$

$|\overrightarrow{QP'}| = D$ er avstanden fra P til linjen og Q er et vilkårlig valgt punkt på linjen slik at

$$D = |\overrightarrow{QP'}| = \frac{|\overrightarrow{QP} \cdot \vec{n}|}{|\vec{n}|} \tag{3.12}$$

Vi har altså to uttrykk vi kan utlede og bruke for å finne avstanden fra punkt til linje, beroende på om vi er i $\mathbb{R}^2$ eller $\mathbb{R}^3$ og om vi har fått oppgitt kartesiske koordinater, likning for linjer eller vektorer.

I $\mathbb{R}^3$

Avstand fra punkt til plan med normalvektor $[a, b, c]$

$$D = \frac{|ax_1 + by_1 + cz_1 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \tag{3.13}$$

eller

$$D = \frac{|\overrightarrow{PQ} \cdot \vec{n}|}{|\vec{n}|} = \frac{|\overrightarrow{PQ} \cdot (\vec{v_l} \times \vec{v_m})|}{|\vec{v_l} \times \vec{v_m}|}$$

Der $\vec{v_l}$ og $\vec{v_m}$ er vektorer som utspenner et plan.

Avstand fra punkt til linje med normalvektor $[a, b, c]$**:**

$$D = \frac{|ax_1 + by_1 + cz_1 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

som vi ser likner på likning 3.13 men de har forskjellig normalvektor.

I $\mathbb{R}^2$ og i $\mathbb{R}^3$

For avstand fra punkt til linje med i med retningsvektor $\vec{v_l}$

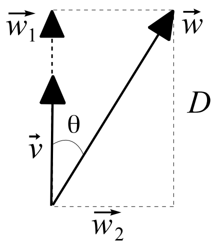
$$D = \frac{|\overrightarrow{PQ} \times \vec{v_l}|}{|\vec{v_l}|} \tag{3.14}$$

Men intuitivt er det ikke riktig å bruke kryssprodukt i $\mathbb{R}^2$. I $\mathbb{R}^2$ blir avstanden fra punkt til linje med normalvektor $[a, b]$.

$$D = \frac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} \tag{3.15}$$

Avstandsformlene og dekomponering av vektorer

Skalarprodukter brukes ofte til projeksjoner for å finne komponenter til matematiske operasjoner. Ved å bruke projeksjoner finner vi også avstandsformlene.



Figur 3.12: Projeksjonen $\vec{w_1}$ av vektoren $\vec{w}$ på $\vec{v}$.

Fra figur 3.12 ser vi at

$$\vec{w} = \vec{w_1} + \vec{w_2}$$

$$\vec{w} \cdot \vec{v} = \vec{w}_1 \cdot \vec{v} + \vec{w}_2 \cdot \vec{v}$$

$$\vec{w}_2 \cdot \vec{v} = 0 \text{ på grunn av at } \theta = 90^o$$

$$\vec{w} \cdot \vec{v} = \vec{w_1} \cdot \vec{v} = |\vec{w_1}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos 0$$

$$|\vec{w_1}| \cdot |\vec{v}| = \vec{w} \cdot \vec{v}$$

Omskrevet så får vi:

$$D = |\vec{w_1}| = \frac{\vec{w} \cdot \vec{v}}{|\vec{v}|}$$

3.5 Hyperplan

Et hyperplan i $\mathbb{R}^n$ er den samlingen av punkter $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ som tilfredsstiller en lineær kombinasjon på formen [4, s. 51-57]

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = b$$

Hvis $\mathbb{R}^2$ ($n = 2$), er hyperplanet en linje ($\mathbb{R}^{n-1}$) slik at den generelle likningen for en linje i planet er

$$ax + by = c$$

Hvor a og b ikke begge er 0. Gjennom $\mathbb{R}^2$ går det en entydig linje.

Hvis $\mathbb{R}^3$, (n=3) er et hyperplan er det et vanlig plan i rommet, og er gitt ved en likning på formen

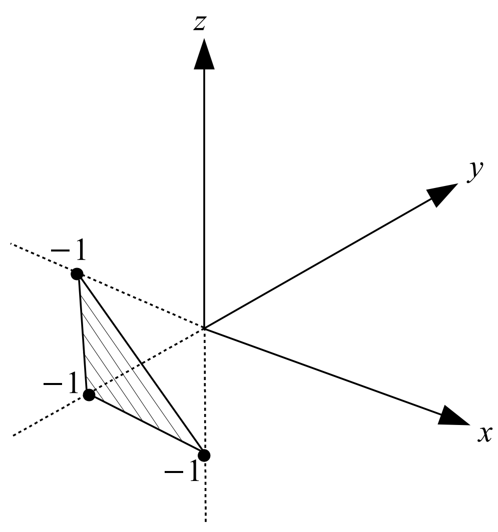
$$ax + by + cz = d$$

Altså bestemmer tre punkter, som er ikke er på samme linje, et plan.

Planet

$$x + y + z + 1 = 0$$

skjærer 3 akser og 3 plan. Når både y og z er 0, blir x lik -1. Og tilsvarende for skjæring med de andre aksene. Planet strekker seg uendelig utover, men vi begrenser det ofte for å kunne visualisere det.



Figur 3.13: Et hyperplan med likning $x + y + z + 1 = 0$ i $\mathbb{R}^3$.

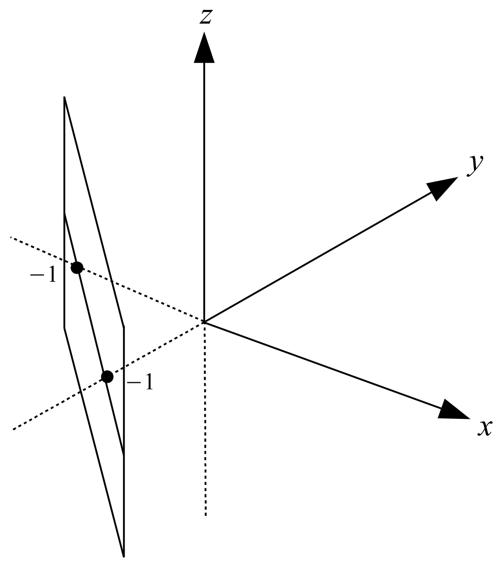
Fra figure 3.13 ser vi at

$$\begin{array}{ll} x = 0 & \text{i } yz\text{-planet} \\ y = 0 & \text{i } xz\text{-planet} \\ z = 0 & \text{i } xy\text{-planet} \end{array}$$

Planet

$$x + y + 1 = 0$$

skjærer 2 akser og 2 plan. Likningen gir ingen informasjon om z. z kan ha alle verdier og likevel stemmer likningen.

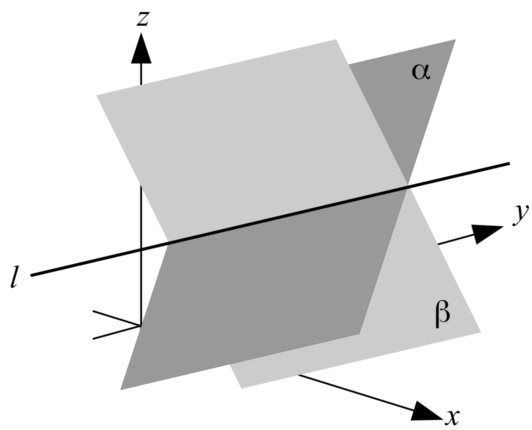


Figur 3.14: Et hyperplan med likning $x + y + 1 = 0$ i $\mathbb{R}^3$.

Planet i figur 3.14 blir et plan hvor $x = -1$ og $y = -1$ ligger i planet og planet er parallellt med z-aksen.

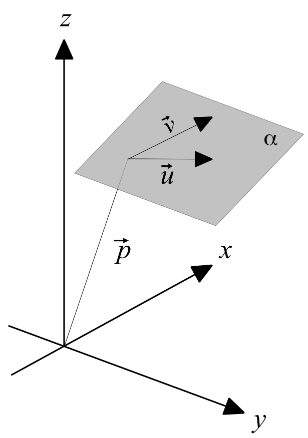
Parameterframstilling for en linje i rommet

Linjer i rommet uttrykkes ved parameterframstilling, som også kalles likningsframstilling. “En likningsframstilling for en linje i $\mathbb{R}^3$ er et likningssett som gir skjæringen mellom to plan.” [3, s. 57]. Vi for da en parameterframstilling for skjæringslinjen l. En linje l er bestemt av et punkt P_0 og en vektor $\vec{v}$. $\vec{v}$ kalles en retningsvektor for linjen.



Figur 3.15: En linje l, som vi får ved skjæringen mellom to plan.

Parameterframstilling for plan i rommet



Figur 3.16: Vektorene $\vec{u}$ og $\vec{v}$ utspenner et plan. $\vec{p}$ forbinder $\vec{u}$ og $\vec{v}$ med origo.

Parameterframstillingen til planet α er

$$\vec{p}_0 + s\vec{u} + t\vec{v} \tag{3.16}$$

Vektorene $\vec{u}$ og $\vec{v}$ må være lineært uavhengige. Da spenner de ut et plan. Hvis $\vec{p} = 0$, så går planet gjennom origo. Komponentene til parameterframstillingen til planet α er

$$\alpha : \begin{cases} x = x_0 + su_1 + tv_1 \\ y = y_0 + su_2 + tv_2 \\ z = z_0 + su_3 + tv_3 \end{cases}$$

(x, y, z) angir da alle punkter i planet α. Likningen for x-aksen i rommet får vi når

$$y = 0 \quad \text{og} \quad z = 0$$

Da har vi to plan som krysser hverandre i x-aksen, men x-aksen kan da fåes fra mange ulike plan.

Kapittel 4

Lærebøker og romgeometri

Den norske videregående skole har 3 lærebøker å velge i mellom for Matematikk R2. Disse er:

i. *Matematikk R2* utgitt av forlaget Aschehoug [1]

ii. *Sinus R2* utgitt av forlaget Cappelen Damm [2]

iii. *Sigma R2* utgitt av forlaget Gyldendal [3]

I følge kompetansemålene (se kapittel 1) for R2, må lærebøkene inneholde visse temaer innen romgeometri. Romgeometri anses generelt å være noe vanskeligere enn andre temaer innen matematikken i videregående skole. Dette gjør at god undervisning, presentasjon og lærebøker står sentralt. Fra R1 har elevene erfaring med plangeometri. Èn utfordring med romgeometri er å visualisere romlige figurer i læreboka for å bedre forståelsen. Det at lærebøkene tolker kompetansemålene ulikt kan også påvirke elevenes forutsetninger på eksamen, ettersom eksamen er likt for alle uansett lærebok.

4.1 Aschehoug – "Matematikk R2"

Generelt

Generelt inntrykk av Aschehougs lærebok i Matematikk R2 [1], kapittelet om romgeometri, er at den går gjennom relevante tema innen romgeometri og vektorregning, og ser ved første øyekast ut til å dekke kompetansemålene. Hvert delkapittel har en gul boks med læremål for kapittelet helt i starten. Formlene som er blir brukt er uthevet i beige bokser, og det er eksempler for bruk av alle formlene. Det er noen oppgaver knyttet til hvert enkelt tema. Av lærebokas 311 sider med fagstoff (altså ekskludert oppgavene bakerst), er 61 sider om romgeometri, som tilsvarer 20%. Oppgavesamlingen bakerst i boka har 7 temaer, og romgeometri tilsvarer 13% av oppgavene.

Oversikt over temaer/delkapitler

1. Koordinater i rommet: Koordinatsystem i rommet med av x-, y- og z-koordinater og høyrehåndskoordinatsystem. Illustrerer også plan i koordinatsystemet.

2. Avstander i rommet: Benytter pytagorassetningen.

3. Vektorer i rommet: Bygger på R1. Regneregler med vektorkoordinater og lengden av en vektor som tilsvarer formel fra pkt. 2. Parallelle vektorer blir definert.

4. Skalarprodukt: Formel for skalarprodukt og definisjon av ortogonale vektorer. Metode for vinkel mellom to vektorer.

5. Parameterframstilling intro: Oppramsing av eksempler på plan og linjer i rommet. Burde hatt noen illustrerende figurer her.

6. Parameterframstilling for linjer i rommet: Definisjon av rett linje ved formel. Skjæring mellom to linjer. Igjen her; vinkelen mellom to linjer, men ved parameterframstilling.

7. Parameterframstilling for et plan: Rett fram framstilling av parameterframstilling.

8. Vektorprodukt: Definisjon på vektorprodukt (inkl. deres vinkler) og på koordinatform (vanligvis benyttet). Fotografi med ?åpen? bildetekst. Hvis ikke lærer forklarer her, bør det være bildetekst.


1.3 VEKTORPRODUKT

I 1.3 skal du lære å regne ut vektorprodukt og bruke det til å beregne areal og volum.

I R1 definerte vi vektoraddisjon, multiplikasjon av vektor med en skalar og skalarprodukt for vektorer i planet. Som vi har sett, kan vi generalisere alle disse vektoroperasjonene til rommet.
I rommet definerer vi i tillegg en vektoroperasjon som vi kaller *vektorprodukt*.
Vektorproduktet av to vektorer $\vec{u}$ og $\vec{v}$ er en vektor. Denne vektoren står vinkelrett på både $\vec{u}$ og $\vec{v}$. Det gjør at vektorproduktet får mange nyttige anvendelser.

Vektorproduktet kan ha mange nyttige anvendelser ...

Figur 4.1: Et klipp hentet fra Aschehougs lærebok i R1, som forklarer vektorprodukt.

9. Egenskaper ved vektorprodukt: Definisjon av parallelle vektorer, burde kanskje vært nevnt i pkt. 8 også, i forbindelse med vinkler. Èn oppgave her; det står at man skal ?bruke metoden i eksempel 5 og regne ut?. Burde ikke eleven få oppgaveteksten ?Regn ut vektorproduktet? i stedet?

10. Vektorprodukt og areal: Areal av trekant og parallellogram (som benyttes i utledninger senere i kapittelet, bl.a. i pkt. 11).

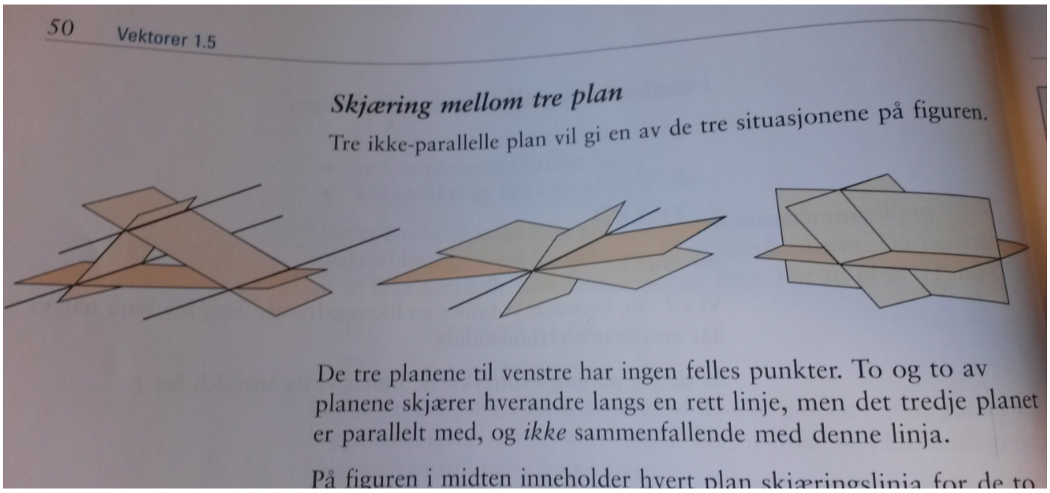
11. Volumprodukt: Volum av parallellepeptid

12. Likningen av et plan: Utledning av formel/likning.

13. Parallelle plan og ikke-parallelle plan: Presenterer at parallelle plan kan vises ved hjelp av normalvektorene, og hvordan man finner vinkelen mellom to plan.

14. Skjæring mellom plan og linje: Delkapittelet går rett på eksempler. Videre; vinkel mellom plan og linje, skjæring mellom plan, og liknings-framstilling for en linje. Framstilling av en linje ved parametisering ble presentert tidligere (se pkt. 6), hva med å ta likningsframstillingen også der? Skjæring mellom tre plan ved illustrasjon presenteres; her er introen/forklaringen til illustrasjonen "Tre ikke-parallelle plan vil gi en

av de tre situasjonene på figuren", noe som kan være forvirrende for da det er snakk om parallelle plan er det parvise parallelle. Dvs. at et tredje parallelt plan vil være parallelt med begge de to andre parallelle planene. En annen forvirring kan være "(...)en av de tre (...)?, som kan forstås som at bare èn av de tre figurene representerer riktig, mens de to andre representerer feil. Det riktige er at alle tre figurene representerer ikke-parallelle plan, men bare på ulike måter. Likning og parameterframstilling for plan presenteres til slutt. Dette er basert på samme framstilling (parameter og likning) som av linjer.


50 Vektorer 1.5

Skjæring mellom tre plan

Tre ikke-parallelle plan vil gi en av de tre situasjonene på figuren.

De tre planene til venstre har ingen felles punkter. To og to av planene skjærer hverandre langs en rett linje, men det tredje planet er parallelt med, og *ikke* sammenfallende med denne linja.

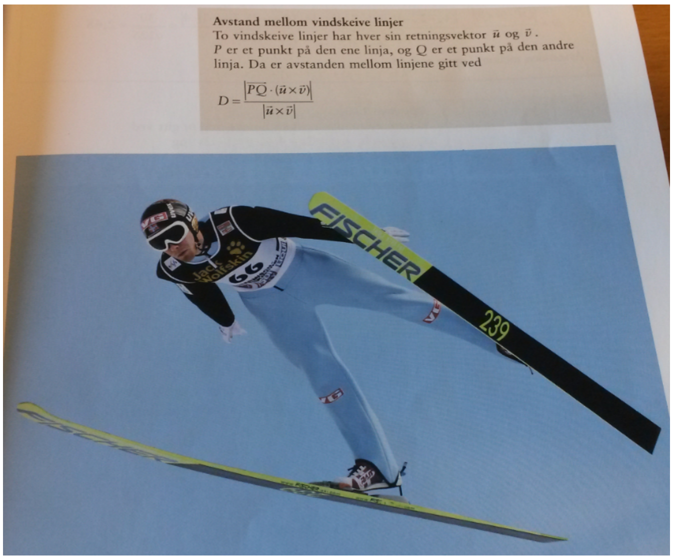
På figuren i midten inneholder hvert plan skjæringslinja for de to

Figur 4.2: Hentet fra Aschehougs lærebok i R1

15. Avstand mellom punkt og linje og mellom to linjer: Formel presenteres. Vindskeive linjer introduseres for første gang. Forklaring/definisjon av vindskeive linjer gjøres ikke. Presentasjonen går direkte fra avstand fra punkt til linje, og til avstand mellom to linjer (inkl. vindskeive). Hva med å ha et tydeligere skille mellom punkt-linje og linje-linje (heller nevne her at punkt-linje benyttes ved vindskeive linjer?)?

16. 16. Avstand til plan: Avstand fra punkt til plan, og linje til plan. Formler for avstand punkt til plan, linje til plan, og linje til linje (vindskeive linjer og avstandsformel). Dette er formler/metoder som har en sammenheng med formlene i pkt. 15. «Ny formel» for avstand mellom vindskeive linjer introduseres altså her (linje til linje). Hva med å ha det som har med vindskeive linjer samlet siden det er sentrale sammenhenger mellom formlene? Jfr. Sammenligning av avstandsformler i Kapittel 4.4. Under formelen for vindskeive linjer er det et fotografi av en skihopper. Det er usikkert hva læreboka vil ha fram av dette bildet, men ved et (?perfekt??) skihopp er skiene ikke vindskeive (de vil altså skjære hverandre ved forlengelse av skiene).

Det er ikke bildetekst til fotografiet. Det presenteres avstandsformler på både vektor- og koordinatform i dette delkapittelet. Dette er formler som kan benyttes både for punkt-linje og punkt-plan. Dette burde vært spesifisert.


Avstand mellom vindskeive linjer
To vindskeive linjer har hver sin retningsvektor $\vec{u}$ og $\vec{v}$.
P er et punkt på den ene linja, og Q er et punkt på den andre linja. Da er avstanden mellom linjene gitt ved

$$D = \frac{\left|\overrightarrow{PQ} \cdot (\vec{u} \times \vec{v})\right|}{\left|\vec{u} \times \vec{v}\right|}$$

Figur 4.3: Et bilde hentet fra Aschehougs lærebok i R2, der en skihoppers ski skal billedliggjøre begrepet vindskeive linjer.

17. Kuleflater: likning for kuleflate og overflate av kulesegment

18. Plane romfigurer: To lengre eksempler.

Oppsummering

I denne læreboka er det ikke lagt mye vekt og plass på forklaring i temaet romgeometri. I matematikken kan det være vanskelig å se for seg hva som egentlig skjer i rommet, og dette burde Aschehoug presentert både bede og mer. Det er flere uhensiktsmessige illustrasjoner i boka, noe som kan skape mer forvirring enn oppklaring. Videre er inntrykket at den ?hopper? litt. Dette gjør at man blir sittende å unødig måtte bla frem og tilbake i boka ? hvilke formler gjelder for hva? Et eksempel på dette er introduksjon av vindskeive linjer i rommet, og parameter- og likningsframstilling, samt avstandsformler.

4.2 Cappelen Damm – "Sinus R2"

Generelt

Førsteinntrykket av Cappelens lærebok Sinus Matematikk, i romgeometri, er at man har fokusert mye på romgeometri, der det er mange figurer hvor dybden i de tredimensjonale figurene er tydeliggjort på en god måte. Delkapitlene har informative overskrifter og viktige setninger har gul bakgrunn. Eksemplene er oversiktlige. Av bokas 346 sider, er 96 sider om vektorer i rommet og romgeometri, altså 28 %. I en egen oppgavesamling med 9 temaer, er 26% av oppgavesidene i vektorer/romgeometri. Læreboka har to kapitler omhandler beregninger i 3D; "Vektorer" og "Romgeometri".

Oversikt over temaer/delkapitler

Vektorer

1. Romkoordinater: Figurer som visualiserer 3D med koordinatsystem med god dybdeforståelse og gode fargenyanser

2. Vektorer i rommet: Positive vektorer røde, negative vektorer blå. Innfører begrepet lineært uavhengige vektorer, at alle vektorer i rommet kan uttrykkes ved hjelp av tre slike vektorer

3. Vektorkoordinater: Innfører begrepet basisvektorer ex, ey, ez. Disse tegnes inn i gode 3D-koordinatsystem.

4. Lengden av en vektor: Viser figur hvor punktet P0 (x0, y0, z0) er projeksjonen til P1 (x, y, z) ned i planet.

5. Skalarproduktet: Viser at det er spesielt egnet til å finne vinkler som står vinkelrett på hverandre.

6. Regneregler for skalarprodukt: Viser bruk av kommutativ, distributiv og assosiativ lov,uten å bruke disse begrepene..

7. Determinant: Innføring i utregning av determinant fra 3x3 ?matrise (6 sider). Også vist framgangsmåte på kalkulatorer.

8. Vektorproduktet: Foto som viser høyrehåndsregelen. Utregning vha. determinantframstillingen blir likevel noe uoversiktlig.

9. Volum: Bruk av vektor- og skalarprodukt til å vise volum av parallellepiped og pyramider.

Romgeometri

10. Likningen for et plan: Gode illustrasjoner av plan i rommet, bruk av fargenyanser. Men hva betyr det i likningen geometrisk.

11. Vinkelen mellom to plan: Viser skjæring av plan som flater, og overfører tilsvarende på figur med bare linjer/vektorer.

12. Rette linjer i rommet: Skjæring mellom linje og plan er ofte vanskelig å visualisere.

13. Parameterframstilling for et plan: Noen plan går gjennom origo, andre ikke.

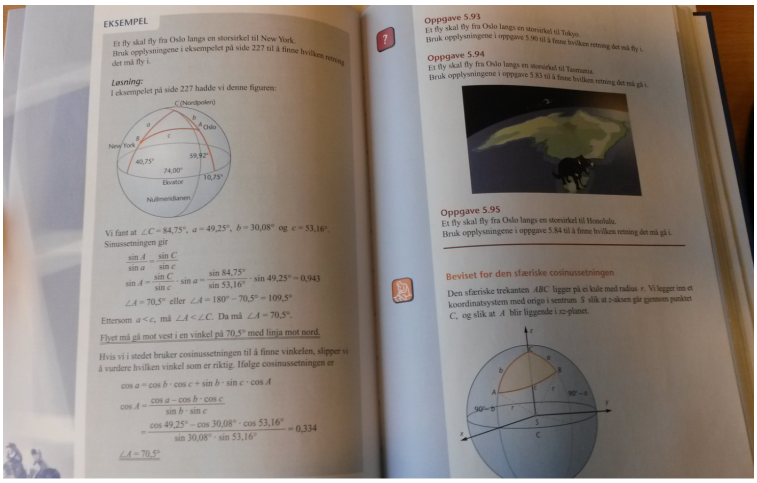
14. Likningen for ei kule: God figur i oppgave hvor linje skjærer gjennom kule.

15. Sfærisk avstand: Innfører buelengder og storsirkler

16. Sfæriske tokanter og trekanter: Har et lengre bevis for formelen for areal av en sfærisk trekant.

17. Sfæriske koordinater: Mange figurer. Beregning av reiseruter ut fra lengde- og breddegrader.

18. Sfærisk trigonometri: Har bl.a. bevis for den sfæriske cosinussetningen.



EKSEMPEL

Et fly skal fly fra Oslo langs en storsirkel til New York. Bruk opplysningene i eksempelet på side 227 til å finne hvilken retning det må fly i.

Løsning:
I eksempelet på side 227 hadde vi denne figuren:

Vi fant at $\angle C = 84{,}75°$, $a = 49{,}25°$, $b = 30{,}08°$ og $c = 53{,}16°$.
Sinussetningen gir

$$\frac{\sin A}{\sin a} = \frac{\sin C}{\sin c}$$

$$\sin A = \frac{\sin C}{\sin c} \cdot \sin a = \frac{\sin 84{,}75°}{\sin 53{,}16°} \cdot \sin 49{,}25° = 0{,}943$$

$$\angle A = 70{,}5° \text{ eller } \angle A = 180° - 70{,}5° = 109{,}5°$$

Ettersom $a < c$, må $\angle A < \angle C$. Da må $\angle A = 70{,}5°$.

Flyet må gå mot vest i en vinkel på 70,5° med linja mot nord.

Hvis vi i stedet bruker cosinussetningen til å finne vinkelen, slipper vi å vurdere hvilken vinkel som er riktig. Ifølge cosinussetningen er

$$\cos a = \cos b \cdot \cos c + \sin b \cdot \sin c \cdot \cos A$$

$$\cos A = \frac{\cos a - \cos b \cdot \cos c}{\sin b \cdot \sin c} = \frac{\cos 49{,}25° - \cos 30{,}08° \cdot \cos 53{,}16°}{\sin 30{,}08° \cdot \sin 53{,}16°} = 0{,}334$$

$\angle A = 70{,}5°$

Oppgave 5.93
Et fly skal fly fra Oslo langs en storsirkel til Tokyo.
Bruk opplysningene i oppgave 5.90 til å finne hvilken retning det må fly i.

Oppgave 5.94
Et fly skal fly fra Oslo langs en storsirkel til Tasmania.
Bruk opplysningene i oppgave 5.83 til å finne hvilken retning det må gå i.

Oppgave 5.95
Et fly skal fly fra Oslo langs en storsirkel til Honolulu.
Bruk opplysningene i oppgave 5.84 til å finne hvilken retning det må gå i.

Beviset for den sfæriske cosinussetningen

Den sfæriske trekanten ABC ligger på ei kule med radius r. Vi legger inn et koordinatsystem med origo i sentrum S slik at z-aksen går gjennom punktet C, og slik at A blir liggende i xz-planet.

Figur 4.4: Et utklipp fra Cappelen Damms kapittel om sfærisk geometri.

Oppsummering

Cappelens Sinus R2 legger stor vekt på å forklare og visualisere romgeometrien. Temaet sfærisk geometri er viet 20 sider, med fargerike figurer og mange oppgaver. Beregning av sfæriske to- og trekanter gjennomgås på UiO i MAT2500 Geometri, hvor mange oppgaver kan løses ut fra hva som omtales i Sinus R2. Vi mener at det da unødig mye sfærisk romgeometri med tanke på kompetansemålene.

4.3 Gyldendal Damm – "Sigma R2"

Generelt

Læreboka for Matematikk R2 fra Gyldendal, Sigma R2, har et oversiktlig oppsett med 2 sider per tema/overskrift. Dette gjør det enkelt å finne fram i læreboka. Hvert delkapittel starter med en boks hvor det står hva man skal lære. Videre følger tekst, eksempler og noen aktiviteter/oppgaver. I slutten av hvert hovedkapittel er det et sammendrag og oppgavesamling tilhørende kapittelet. Av læreboka totalt 273 sider (ekskludert fasit bakerst), utgjør 34 sider kapittelet ?Vektorer og geometri i rommet? (ekskludert oppgavedelen bakerst i kapittelet). Fagstoffet om romgeometri utgjør altså 12% av sidene.

Oversikt over temaer/delkapitler

1. Pyramider: Vinkler mellom linjer og plan, samt pyramideberegninger.
2. Vektorkoordinater i rommet: Koordinatsystem og vektorkoordinater i rommet, generell vektorregning.
3. Skalarproduktet og lengder og vinkler i rommet: Beregning av skalarprodukt og lengden av vektor.
4. Parameterframstillinger for rette linjer:
5. Vektorproduktet: Høyrehåndsregelen og regneregler for skalarproduktet introduseres. Determinant innføres for bruk til beregning av vektorproduktet.
6. Likningsframstilling for plan: Regning med plan. Normalvektor, likninger, skjæringspunkt og vinkel.
7. Avstand fra punkt til plan: Beregning og bevis for avstandsformelen.
8. Avstand mellom punkt og linje og mellom to linjer: Tar først for seg avstand mellom punkt og linje, deretter avstand mellom to linjer.

Avstanden mellom to linjer forklares, men begrepet vindskeive linjer nevnes ikke, bare at "Normalt skjærer ikke to linjer i rommet hverandre (. . .)".

9. Parameterframstilling for plan og likning for linje: Hva med å ta dette på samme sted eller like etter ?Likningsframstilling form plan? (pkt.6)?

10. Areal og volum med vektorprodukt: Arealformler for volum av trekant og parallellogram, samt volum av pyramide og parallellepiped, med vektorprodukt.

11. Likningsframstilling for kuleflate: Finner likning for kuleflate og tangentplan til kuleflate.

12. Kuler og parameterframstilling for kuleflater: Volum og overflate av kule.

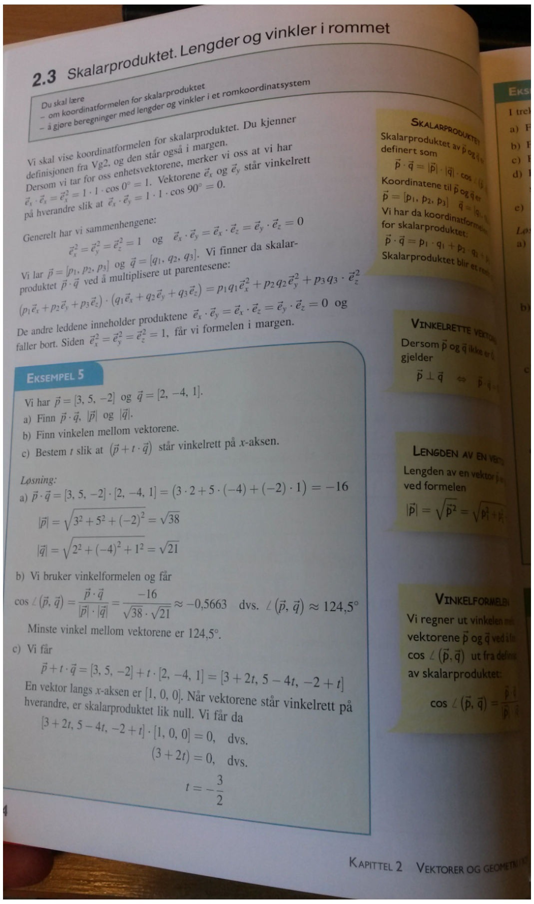
13. Vektorer i rommet og plan og parallellitet: Finne uttrykk for vektorer i rommet uten koordinatsystem og å avgjøre når punkter ligger på linje og i et plan. Hvorfor står ikke dette punktet lengre framme i kapittelet?

14. Regning med skalarprodukt og vektor vinkelrett på plan: Burde ikke dette stå etter pkt. 3 "Skalarproduktet og lengder og vinkler i rommet"?

15. Sammensatte eksempler: Kun eksempler her, hvor elementer som er gjennomgått i tidligere delkapitler benyttes.

Oppsummering

Læreboka Sigma R2 er oversiktlig da hvert tema ("opplag") går over to sider, da blir man fort kjent med strukturen og det er enkelt å finne fram. Formler og regler er samlet i gule bokser i margen. Margen er plasser til høyre på partallssidene, noe som gjør at de nesten kan komme "i brett", slik at de kan være vanskelig å se. De gule boksene burde heller vært i den andre margen.



2.3 Skalarproduktet. Lengder og vinkler i rommet

Du skal lære
– om koordinatformelen for skalarproduktet
– å gjøre beregninger med lengder og vinkler i et romkoordinatsystem

Vi skal vise koordinatformelen for skalarproduktet. Du kjenner definisjonen fra Vg2, og den står også i margen. Dersom vi tar for oss enhetsvektorene, merker vi oss at vi har $\vec{e}_x \cdot \vec{e}_x = \vec{e}_x^2 = 1 \cdot 1 \cdot \cos 0° = 1$. Vektorene $\vec{e}_x$ og $\vec{e}_y$ står vinkelrett på hverandre slik at $\vec{e}_x \cdot \vec{e}_y = 1 \cdot 1 \cdot \cos 90° = 0$.

Generelt har vi sammenhengene:

$$\vec{e}_x^2 = \vec{e}_y^2 = \vec{e}_z^2 = 1 \quad \text{og} \quad \vec{e}_x \cdot \vec{e}_y = \vec{e}_x \cdot \vec{e}_z = \vec{e}_y \cdot \vec{e}_z = 0$$

Vi lar $\vec{p} = [p_1, p_2, p_3]$ og $\vec{q} = [q_1, q_2, q_3]$. Vi finner da skalarproduktet $\vec{p} \cdot \vec{q}$ ved å multiplisere ut parentesene:

$$(p_1\vec{e}_x + p_2\vec{e}_y + p_3\vec{e}_z) \cdot (q_1\vec{e}_x + q_2\vec{e}_y + q_3\vec{e}_z) = p_1q_1\vec{e}_x^2 + p_2q_2\vec{e}_y^2 + p_3q_3 \cdot \vec{e}_z^2$$

De andre leddene inneholder produktene $\vec{e}_x \cdot \vec{e}_y = \vec{e}_x \cdot \vec{e}_z = \vec{e}_y \cdot \vec{e}_z = 0$ og faller bort. Siden $\vec{e}_x^2 = \vec{e}_y^2 = \vec{e}_z^2 = 1$, får vi formelen i margen.

Eksempel 5

Vi har $\vec{p} = [3, 5, -2]$ og $\vec{q} = [2, -4, 1]$.
a) Finn $\vec{p} \cdot \vec{q}$, $|\vec{p}|$ og $|\vec{q}|$.
b) Finn vinkelen mellom vektorene.
c) Bestem t slik at $(\vec{p} + t \cdot \vec{q})$ står vinkelrett på x-aksen.

Løsning:
a) $\vec{p} \cdot \vec{q} = [3, 5, -2] \cdot [2, -4, 1] = (3 \cdot 2 + 5 \cdot (-4) + (-2) \cdot 1) = -16$

$|\vec{p}| = \sqrt{3^2 + 5^2 + (-2)^2} = \sqrt{38}$

$|\vec{q}| = \sqrt{2^2 + (-4)^2 + 1^2} = \sqrt{21}$

b) Vi bruker vinkelformelen og får

$\cos \angle(\vec{p}, \vec{q}) = \dfrac{\vec{p} \cdot \vec{q}}{|\vec{p}| \cdot |\vec{q}|} = \dfrac{-16}{\sqrt{38} \cdot \sqrt{21}} \approx -0{,}5663$ dvs. $\angle(\vec{p}, \vec{q}) \approx 124{,}5°$

Minste vinkel mellom vektorene er 124,5°.

c) Vi får

$\vec{p} + t \cdot \vec{q} = [3, 5, -2] + t \cdot [2, -4, 1] = [3 + 2t, 5 - 4t, -2 + t]$

En vektor langs x-aksen er $[1, 0, 0]$. Når vektorene står vinkelrett på hverandre, er skalarproduktet lik null. Vi får da

$[3 + 2t, 5 - 4t, -2 + t] \cdot [1, 0, 0] = 0$, dvs.
$(3 + 2t) = 0$, dvs.
$t = -\dfrac{3}{2}$

Skalarproduktet
Skalarproduktet av $\vec{p}$ og $\vec{q}$ er definert som
$\vec{p} \cdot \vec{q} = |\vec{p}| \cdot |\vec{q}| \cdot \cos$
Koordinatene til $\vec{p}$ og $\vec{q}$ er
$\vec{p} = [p_1, p_2, p_3]$
Vi har da koordinatformelen for skalarproduktet:
$\vec{p} \cdot \vec{q} = p_1 \cdot q_1 + p_2$
Skalarproduktet blir et

Vinkelrette vektorer
Dersom $\vec{p}$ og $\vec{q}$
gjelder
$\vec{p} \perp \vec{q}$

Lengden av en vektor
Lengden av en vektor
ved formelen
$|\vec{p}| = \sqrt{\vec{p}^2} =$

Vinkelformelen
Vi regner ut vinkelen
vektorene $\vec{p}$ og $\vec{q}$
cos $\angle(\vec{p}, \vec{q})$ ut fra
av skalarproduktet:
$\cos \angle(\vec{p}, \vec{q}) =$

Kapittel 2 Vektorer og geometri

Figur 4.5: Et utklipp fra “Gyldendal” ’s kapittel om skalarprodukt.[3]

Sammenligning av bøkene

I tabellen sammenlignes de tre lærebøkene i Matematikk R2 med tanke på kapitlene som omhandler romgeometri.

Lærebøker for Matematikk R2			
	Aschehoug[1]	Cappelen Damm[2]	Gyldendal[3]
	Matematikk R2	Sinus Matematikk R2	Sigma R2
Førsteinntrykk	Har mer «luft» på sidene enn de to andre bøkene	Stort/langt kapittel om romgeometri. Gode figurer.	Oversiktlig med 2 sider per tema/delkapittel
Figurer	Her er det særlig ett fotografi, skihopperen, som skiller seg ut og skaper forvirring	Figurene i Sinus er klart de mest intuitive og «romlige» i forhold til de to andre bøkene	Figurene her har minimum størrelse, men får likevel med seg formålet på en grei måte.
Struktur	Uoversiktlig med overskrifter uten nummerering og at nye delkapitler starter midt på en side.	Grei oversikt. Har to kapitler: «Vektorer» og «Romgeometri»	Oversiktlig struktur, slik som førsteinntrykket sier, men de gule formelboksene skulle ikke vært «i bretten».
Utledninger	Går ikke veldig grundig gjennom alle formler, men tar de aller viktigste	Har viet mye plass til romgeometri i denne læreboka, så her er det også flere utledninger	Går ikke veldig grundig gjennom alle formler, men tar de aller viktigste
Eksempler	OK	OK	Eksempler opptar en stor andel av sidene og har som regel en «oppskrift»; a), b), c) osv.
Ulik fokus på tema	Begrepet vindskeive linjer er forklart ved to anledninger. Flere fremgangsmåter for å beregne avstander. Disse formlene har nære sammenhenger. Det er brukt en del plass på utledninger, men tydeligere spesifisering om sammenhenger burde vært gitt.	Vier stor plass til determinanter og sfæriske figurer. Begrepet vindskeive linjer ikke nevnt, men fenomenet er forklart, samt avstandsformler presentert. Har beskrevet framgangsmåter for bruk av kalkulator.	Begrepet vindskeive linjer nevnes ikke, men fenomenet er forklart. Samme avstandsformler som i Aschehoug er presentert. Avstandsformlene er mer «samlet», så da ser man sammenhengene mellom formlene bedre.
Oppgaver	Oppgavene i hvert delkapittel er litt rotete satt opp. Det er èn oppgave her og èn der	Eget hefte med oppgavesamling	Har «Test-deg selv» oppgaver der de får en godt «oppskrift» for oppgavene
Totalinntrykk	Har bra med «luft», men kommer til kort når det gjelder figurer og oversiktlighet	Går grundigst til verks, og har gode figurer som er viktig for god forståelse for romgeometri. Muligens overdrevent mye sfærisk romgeometri med tanke på kompetansemålene.	Er mest oversiktlig grunnet god struktur med to sider per delkapittel/tema

Tabell 4.1: Tabell som oppsummerer innholdet i lærebøkene.

Bibliografi

[1] O. Heir, G. Herstad, H. Moe & P. A. Skrede, *Matematikk R2.* Aschehoug, 1.utgave, 2008 ISBN: 9788203337024

[2] S. Hals, F. Hanisch, T. Oldervoll, O. Orskaug & A. Vaaje, *Sinus R2* . Cappelen Damm, 1.utgave, 2008 ISBN: 9788202277956

[3] K. E. Sandvold, *Sigma R2.* Gyldendal, 1.utgave, 2008 ISBN/EAN: 9788205380028

[4] R. Fenn, *Geometry.* Springer, 1.utgave, 2001, ISBN: 1852330589