Tall

SKOLEPROSJEKT MAT4010 - VÅR 2014

AUTHORS:
ASTRI STRAND LINDBÆCK
CAMILLA HELVIG
PIA LINDSTRØM

Date: March 31, 2014.

1. Innledning

Vårt skoleprosjekt omhandler ulike konsepter innenfor det matematiske området tall. Noen av konseptene er direkte knyttet til matematikkpensumet i skolen, mens andre ikke er med i pensum, men kan likevel være lurt for matematikklærer å ha kunnskaper om. Felles for de alle er at de ofte kan være vanskelige å forstå og at det ikke er åpenbart hvorfor konseptene er som de er.

Vi deler de reelle tallene inn i flere ulike mengder ettersom hvilke egenskaper de har. De første tallene elevene møter i matematikken på skolen er de naturlige tallene, og tallet 0. Disse tallene lærer man å bruke visse regneoperasjoner på. Men etterhvert vil vi utvide begrepene våre om addisjon, subtraksjon, multiplikasjon og divisjon til andre, og større, mengder tall.

Det er mange områder innenfor temaet "tall" som det kan være viktig å undersøke nærmere. Hvorfor må det for eksempel være slik at $(-1) \cdot (-1) = 1$? De aller fleste av oss vet at det er sånn, men hvorfor? Det er viktig at de som skal undervise matematikk på skolen er trygge på at de vet hvorfor de definisjonene og reglene de lærer elevene holder. Ingenting i matematikken er tilfeldig, og ingenting er regler vi bare "må huske". Vi kan bevise hvorfor ting må være som de er. Dette kan være med til å motivere elevene til å være mer nysgjerrige på matematikken og matematikkens regler.

For de som skal undervise matematikk på skolen er det som sagt viktig å være trygg på hvorfor ting er som de er. Vi vil her gi forklaringer og bevis for hvorfor noen av de tingene vi ofte bruker i matematikken må være som de er. Det er ikke nødvindigvis slik at elevene må se og kunne alle bevisene, men det er viktig at lærerene har mulighet til å forklare hvorfor ting er som de er, om de blir spurt, eller for å motivere elevene.

2. **Tallmengder**

Tallene vi bruker har ulike egenskaper som gjør at vi kan plassere dem i ulike mengder. Det vil være lurt å ha en oversikt over disse tallmengdene og deres relative størrelsesorden.

Tallene vi bruker til å telle med, $1, 2, 3$, osv., kalles de *naturlige tallene*, og har symbolet $\mathbb{N}$.

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$$

Dersom vi kun ønsker å jobbe med addisjon og multiplikasjon (av positive tall) kan vi holde oss til denne mengden. Men dersom vi ønsker å kunne subtrahere, må vi utvide tallbegrepet vårt. For hva er f.eks. $4 - 7$ om vi kun har tallene i mengden $\mathbb{N}$?

Det har altså vist seg å være nyttig å også kunne regne med ikke-positive tall. Ved å inkludere null og negative tall får vi *heltallene* $\mathbb{Z}$.

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$$

Vi ser at de naturlige tallene er inneholdt i mengden av heltall: $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$.

Hvis vi kun ønsker å addere, multiplisere og subtrahere tall, kan vi holde oss til heltallene. Uansett hvilke to heltall vi legger sammen, multipliserer eller trekker fra hverandre, ender vi opp med et nytt heltall. Ønsker vi derimot også å kunne dele tall på hverandre, må vi igjen utvide tallmengden vår til å også inkludere brøker som for eksempel $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{-2}{5}$. Dermed får vi en ny mengde som inneholder alle brøker der telleren og nevneren er heltall, men nevnerer ikke er null. Denne mengden kaller vi mengden av *rasjonale tall*. Symbolet for de rasjonale tallene er $\mathbb{Q}$.

$$\mathbb{Q} = \{\frac{a}{b} \mid a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0\}$$

Ved å sette $b = 1$ ser vi at vi kan får et hvilket som helst heltall $a = \frac{a}{1}$. Derfor har vi $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$.

Det viser seg at vi også har tall som ikke kan skrives som en brøk av to heltall. Senere skal vi f.eks. se at $\sqrt{2}$ er et slikt tall. Disse tallene er altså ikke i noen av mengdene vi har definert over, og mengden av dem kaller vi de *irrasjonale tallene*. Det finnes metoder for å undersøke om et tall er rasjonalt eller irrasjonalt, og vi skal se nærmere på rasjonale og irrasjonale tall senere i oppgaven.

Hvis vi nå ser på mengden som består av både de rasjonale og de irrasjonale tallene, har vi fått de *reelle tallene* $\mathbb{R}$.

Tilslutt kan vi utvide de reelle tallene til mengden av *komplekse tall*. Et komplekst tall er på formen $a+bi$, der a og b er reelle tall, mens i er den *imaginære enhet*, som er definert ved

$$i = \sqrt{-1}.$$

Symbolet for mengden av komplekse tall er $\mathbb{C}$

$$\mathbb{C} = \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{R}\}$$

Har man et komplekts tall $a+bi$ kalles a realdelen og b imaginærdelen til tallet. Dersom vi setter $b = 0$ ser vi at vi kun får reelle tall. De reelle tallene er en delmengde av de komplekse tallene.

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$$

Her ser vi hvilke tallmengder som inneholder hvilke. Vær oppmerksom på at disse inklusjonene ikke betyr at noen av de nevnte tallmengdene er endelige. Selv om de er inneholdt i hverandre som vist over, er det uendelig mange elementer i hver mengde! Vi skal senere også diskutere om de rasjonale eller de irrasjonale tallene utgjør den største mengden.

3. **Hvorfor har vi at (-1)· (-1) = 1?**

For å forklare hvorfor $(-1) \cdot (-1) = 1$, starter vi med noe som er mer kjent og som ikke trenger nærmere forklaring. Vi vet at $1 - 1 = 1 + (-1)$ og at $1 \cdot (-1) = (-1)$. Når vi nå skal utvide vårt begrep om multiplikasjon, slik at vi også kan regne med de negative tallene, er det tre lover vi vil skal gjelde:

1. Den kommutative lov:

$$a \cdot b = b \cdot a$$

Dette kan vi bruke for å regne ut stykker på formen $(-a) \cdot b$. Siden vi ser på multiplikasjon som gjentatt addisjon vet vi at

$$a \cdot (-b) = (-b) + (-b) + ... + (-b) \quad \text{der vi har a } (-b)\text{-ledd.}$$

Så vi har f.eks.

$$2 \cdot (-3) = (-3) + (-3) = (-6)$$

Ettersom at vi vil at den kommutative loven skal holde også når vi regner med de negative tallene, får vi

$$(-a) \cdot b = b \cdot (-a) = (-a) + (-a) + ... + (-a)$$

der vi har b $(-a)$-ledd, så vi ser f.eks. at

$$(-2) \cdot 3 = 3 \cdot (-2) = (-2) + (-2) + (-2) = (-6)$$

2. Den assosiative lov:

$$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$$

3. Den distributive lov:

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$$

Når vi vil utforske hva $(-1) \cdot (-1)$ er, vil vi bruke at den distributive lov skal gjelde også for regning med negative tall. Vi har

$$1 - 1 = 0 \implies 1 + (-1) = 0$$

Nå ganger vi begge sider med (-1) og husker at $0 \cdot (-1) = 0$. Da får vi:

$$(-1) \cdot (1 + (-1)) = (-1) \cdot 0$$

Og siden vi vil at den distributive lov skal gjelde, må vi da ha

$$(-1) \cdot 1 + (-1) \cdot (-1) = 0,$$

og vi så tidligere at $(-1) \cdot 1 = 1 \cdot (-1) = -1$, så dette gir

$$(-1) + (-1) \cdot (-1) = 0.$$

Legger vi nå til 1 på begge sider av likhetstegnet har vi at

$$1 + (-1) + (-1) \cdot (-1) = 0 + 1$$
$$(-1) \cdot (-1) = 1.$$

Så vi ser at siden vi vil at alle disse tre lovene skal holde, også ved regning med negative tall, er vi nødt til å ha at $(-1) \cdot (-1) = 1$.

4. Hvorfor er $0,\bar{9} = 1$?

Det kan virke litt mystisk å si at $0,\bar{9} = 1$. Her er det ikke snakk om noen avrunding eller tilnærming, vi mener rett og slett at $0,\bar{9}$, hvor $\bar{9}$ markerer at vi har uendelig mange nitall etter komma, er nøyaktig det samme tallet som 1.
Det er flere måter dette kan bevises på, og vi vil ta for oss noen her.

En av de greieste måtene å se dette på er rett og slett å se på brøken $\frac{1}{3}$. De aller fleste kjenner til, og er komfortable med, at

$$\frac{1}{3} = 0,\bar{3}\text{(altså uendelig mange tretall etter kommaet).}$$

Om vi nå ganger begge sider av likheten med 3, har vi

$$\frac{1}{3} \cdot 3 = 0,\bar{3} \cdot 3$$

$$\implies \frac{3}{3} = 0,\bar{9}, \text{som med én gang viser at}$$

$$0,\bar{9} = 1.$$

En annen måte å vise likeheten på er å skrive om $0,\bar{9}$ til en geometrisk rekke:

$$0,\bar{9} = 9 \cdot (0,1 + 0,01 + 0,001 + ...) = 9 \cdot (0,1 + 0,1^2 + 0,1^3 + ...)$$

$$= 9 \cdot \sum_{k=1}^{\infty} 0,1^k.$$

Dette er en geometrisk rekke, og vi vet at om $|x| < 1$ så har vi at $\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x}$, så

$$0,\bar{9} = 9 \cdot \sum_{k=1}^{\infty} 0,1^k = 9 \cdot 0,1 \cdot \sum_{k=0}^{\infty} 0,1^k = 0,9 \cdot \frac{1}{1-0,1}$$

$$\frac{0,9}{0,9} = 1.$$

Det vi har sett nå, viser at de to tilsynelatende forskjellige tallene $0,\bar{9}$ og 1 faktisk er like. Vi kan kalle dem "kloner". Det er da naturlig å spørre seg selv om flere tall enn 1 har slike kloner.
Etter å ha tenkt oss litt om kan det være logisk å tenke seg at alle tall med en endelig desimalutvikling (altså ett tall med endelig mange

desimaler) har en slik klone - med ett eneste unntak, nemlig 0.
Det er lett å vise at dette stemmer. Vi påstår at:

$$a, a_1a_2...a_n = a, a_1a_2...(a_n - 1)\bar{9}$$

der $a_n \neq 0$ og a kan være både positiv, negativ og null (dette generaliseres da til alle tall med endelig mange desimaler. Merk også at vi ikke multipliserer med $\bar{9}$, men at det "settes på" på enden av tallet). Som et eksempel kan vi se på 3,14. I følge regelen vår over har vi da:

$$3, 14 = 3, 1(4 - 1)\bar{9} = 3, 13\bar{9}$$

Dette fungerer også om bakerste desimal er 1, vi ser at:

$$0, 11 = 0, 1(1 - 1)\bar{9} = 0, 10\bar{9}$$

Gjør vi om det generelle tilfellet til en geometrisk rekke, får vi:

$$\begin{aligned}
a, a_1a_2...(a_n - 1)\bar{9} &= a, a_1a_2...(a_n - 1) + 9 \cdot (10^{-(n+1)} + 10^{-(n+2)} + ...) \\
&= a, a_1a_2...(a_n - 1) + 9 \cdot \sum_{k=n+1}^{\infty} 0, 1^k \\
&= a, a_1a_2...(a_n - 1) + 9 \cdot 0, 1^{n+1} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} 0, 1^k \\
&= a, a_1a_2...(a_n - 1) + 9 \cdot 0, 1^{n+1} \cdot \frac{1}{1 - 0, 1} \\
&= a, a_1a_2...(a_n - 1) + 0, 1^{n+1} \cdot \frac{9}{0, 9} \\
&= a, a_1a_2...(a_n - 1) + 0, 1^{n+1} \cdot 10 \\
&= a, a_1a_2...(a_n - 1) + 0, 1^n \\
&= a, a_1a_2...(a_n - 1) + 0, \overbrace{0...0}^{n-1}1 \\
&= a, a_1a_2...(a_n - 1 + 1) = a, a_1a_2...a_n.
\end{aligned}$$

Så ethvert tall, ulikt null, med endelig desimalutvikling har en klone. Men hva skjer i null? Vi merker oss at klonene til tall som er større enn null "ser" litt mindre ut enn selve tallet, f.eks. har vi at klonen til $3, 14 = 3, 13\bar{9}$. Klonene til de negative tallene derimot, "ser" litt større ut enn selve tallet, f.eks. er klonen til -3,14 = -3,13$\bar{9}$ (som tilsynelatende ligger litt lenger til høyre på tallinjen enn -3,14, og derfor ser litt større ut). Dermed har vi en diskontinuitet i null, og det er kanskje ikke så rart at null ikke har noen klone?

5. **Brøk**

Vi skal nå ta for oss noen aspekter ved brøkregning og divisjon som kan være vanskelig for elevene forstå. Først skal vi komme med en forklaring på hvorfor en brøk ikke er definert når nevneren er null, med andre ord hvorfor det ikke er lov å dele et tall på null. Så skal vi forklare regelen for divisjon av brøker.

Divisjon med 0

Vi vet at ethvert tall multiplisert med null, er null. Men hva skjer om vi prøver å dele ett tall på 0? Skulle vi prøvd å definere brøken $\frac{a}{0}$, der $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ville vi fått problemer. Vi vil her ved hjelp av et selvmotsigelsesbevis vise at divisjon med 0 ikke er definert:
La $r = \frac{a}{b}$, der $a, b \in \mathbb{Z}$ og $a \neq 0$. Da er r et hvilket som helst rasjonalt tall. Ved å multiplisere begge sider med b, får vi:

$$r \cdot b = \frac{a}{b} \cdot b$$

$$a = r \cdot b$$

Vi ønsker her å se på divisjon med tallet null, derfor setter vi $b = 0$, og får:

$$a = r \cdot 0$$

I følge produktregelen er produktet av et hvilket som helst tall multiplisert med null, lik null. Dette medfører at

$$r \cdot 0 = 0$$

og dermed må vi ha $a = 0$, som er en selvmotsigelse. Derfor er ikke divisjon med 0 definert.

Nå vil vi prøve å forklare problemet med divisjon med 0 på en annen måte. Denne gangen er det ikke et bevis, men en forklaringsmåte som kan hjelpe elevene med å forstå bedre hvorfor det ikke gir mening å dele et tall på null. Vi kan si at divisjon er som å ta et tall og dele det opp i mindre deler. Og når vi tar et tall a og deler det på et annet tall b finner vi ut hvor mange ganger tallet b går opp i a. For eksempel er

$$\frac{6}{3} = 2$$

Her blir tallet 6 delt opp i 2 deler, og vi ser at tallet 3 går opp i tallet 6 to ganger (fordi $6 = 3 + 3$). Vi ønsker i vårt tilfelle å se på divisjon med tallet null. Med lignende eksempel som ovenfor vil vi med andre ord finne ut hvor mange ganger tallet 0 går opp i tallet 6. Vi utfører dermed følgende divisjon:

$$\frac{6}{0} = x$$

Men hva blir det? For på samme måte som i forrige eksempel skal tallet 6 kunne skrives som en sum av x antall nuller. Men problemet er at en aldri vil få nok nuller til at summen blir 6. Derfor er ikke $\frac{6}{0}$ definert, og vi kan ikke dele på null.

Men hva om $a = 0$? Kan vi definere denne brøken? Også her ville vi fått problemer. For hva skulle vi definert det som? Vi kunne tenkt oss at det måtte være null, men også at $\frac{0}{0} = \frac{\cancel{0}}{\cancel{0}} = 1$. Faktisk så kunne $\frac{0}{0}$ vært hvilken som helst konstant c:
Anta at $\frac{0}{0} = c$, der $c \in \mathbb{R}$. Da har vi

$$\begin{aligned} \frac{0}{0} &= c \\ 0 &= c \cdot 0 \\ 0 &= 0. \end{aligned}$$

Og det stemmer jo at $0 = 0$. Dermed er det ingenting galt antakelsen vår om at $\frac{0}{0} = c$.
Mest naturlig ville det kanskje likevel vært å definere $\frac{0}{0}$ til å være enten 1 eller 0. Uansett hvilke av de to vi velger kan vi tvinge frem en selvmotsigelse. Anta at divisjon med 0 er definert, og at de vanlige regnereglene gjelder også når vi dividerer med 0. Vi ser på et eksempel for hvert valg av verdi for $\frac{0}{0}$:

Anta først at $\frac{0}{0} = 1$. Vi vet at $0 + 0 = 0$, så hvis $\frac{0}{0} = 1$ får vi:

$$\begin{aligned} 0 + 0 &= 0 \\ 2 \cdot 0 &= 1 \cdot 0 \\ 2 &= 1 \cdot \frac{0}{0} \\ \implies 2 &= 1 \cdot 1. \end{aligned}$$

Så om vi antar at $\frac{0}{0} = 1$, får vi altså at $2 = 1$, som åpenbart er feil.

Anta så at $\frac{0}{0} = 0$. Når vi da kommer frem til uttrykket

$$2 = 1 \cdot \frac{0}{0}$$

i utregningene over, vil vi få

$$2 = 1 \cdot 0 = 0.$$

Så om $\frac{0}{0} = 0$, vil vi ha $2 = 0$, som også er en selvmotsigelse.
På bakgrunn av dise argumentene virker det rimelig klart at vi ikke kan definere uttrykket $\frac{0}{0}$.

Divisjon av brøker

I skolematematikken lærer vi at

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}.$$

Vi starter med å vise dette generelt ved bokstavregning. La $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$, og $b, d \neq 0$. Vi betrakter brøkene $\frac{a}{b}$ og $\frac{c}{d}$. Dividerer vi den ene brøken på den andre får vi en såkalt *brudden brøk*, der hver av de to brøkene $\frac{a}{b}$ og $\frac{c}{d}$ kalles *småbrøker*:

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}$$

Det er ikke nødvendigvis lett å regne ut hva dette blir når vi skal sette inn numeriske verdier for variablene. Vi vil derfor forenkle uttrykket, og det gjør vi ved å forkorte vekk småbrøken i nevneren til den brudne brøken.
For å gjøre dette ganger vi med den inverse brøken, men for å beholde den samme brøken er vi nødt til å gjøre det samme i telleren. Da har vi kun ganget med 1, siden $\frac{\frac{d}{c}}{\frac{d}{c}} = 1$. Dermed har vi:

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{\cancel{c}}{\cancel{d}}} \cdot \frac{\frac{d}{c}}{\frac{\cancel{d}}{\cancel{c}}} = \frac{\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d}}{1} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}$$

Dette viser at en brøk dividert med en annen brøk er det lik den ene brøken multiplisert med den inverse av den andre brøken. Nå kan vi sette inn numeriske verdier, regne ut og finne et svar. Dette er, etter vår mening, en god måte å forklare problemet på. I det følgende vil vi komme med en annen mulig forklaringsmåte. Den krever litt mer regning enn den foregående forklaringsmåten, men kan fungere som en grei forklaring likevel. Den nye forklaringsmetoden har forøvrig samme fremgangsmåte som benyttes i læreboken Sinus 1T når det skal forklares hvordan elevene kan regne ut et svar fra en brudden brøk.

Som i forklaringsmåten ovenfor, ønsker vi også nå å forenkle den brudne brøken, men denne gangen gjør vi det ved å forkorte vekk nevnerne til hver av småbrøkene. Først finner vi en fellesnevner for de to småbrøkene, produktet $b \cdot d$. Vi multipliserer så begge småbrøkene med denne fellesnevneren, og får:

$$\frac{\frac{a}{\cancel{b}} \cdot \cancel{b}d}{\frac{c}{\cancel{d}} \cdot b\cancel{d}} = \frac{\frac{a}{1} \cdot d}{\frac{c}{1} \cdot b}$$

Videre bruker vi at et hvilket som helst tall dividert med tallet 1 er lik seg selv. Så $\frac{a}{1} = a$ og $\frac{c}{1} = c$. Dermed får vi at:

$$\frac{a \cdot d}{c \cdot b} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}$$

I den første overgangen benyttet vi oss av den kommutative loven. Vi kom dermed igjen fram til det vi ønsket å vise.

6. **Potenser**

En potens a^n består av et grunntall $a \in \mathbb{R}$ og en eksponent $n \in \mathbb{N}$. Vi multipliserer grunntallet med seg selv n ganger:

$$a^n = \overbrace{a \cdot \ldots \cdot a}^{n}$$

I denne definisjonen er $n \in \mathbb{N}$, men vi vil etterhvert utvide til at vi kan ha $n \in \mathbb{Q}$.

Dersom to potenser med samme grunntall multipliseres, har vi følgende regel:

$$a^n a^m = a^{n+m}$$

Dette ser vi ved å bruke definisjonen over:

$$a^n a^m = \overbrace{a \cdot \ldots \cdot a}^{n} \cdot \overbrace{a \cdot \ldots \cdot a}^{m} = \overbrace{a \cdot \ldots \cdot a}^{n+m} = a^{n+m}$$

Vi kan bruke denne reglen til å vise at når $a \neq 0$, så er $a^0 = 1$:

$$a^n = a^{n+0} = a^n \cdot a^0.$$

Dermed må vi ha at $a^0 = 1$.

Tilsvarende regel har vi for divisjon av potenser med samme grunntall.

$$\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}.$$

Vi vil at dette skal holde for tre ulike tilfeller; både når $n > m$, $n = m$ og når $n < m$.

Anta først at $n > m$. Da har vi:

$$\frac{a^n}{a^m} = \frac{\overbrace{a \cdot \ldots \cdot a}^{n}}{\underbrace{a \cdot \ldots \cdot a}_{m}} = \frac{\overbrace{\cancel{a} \cdot \ldots \cdot \cancel{a}}^{m} \cdot \overbrace{a \cdot \ldots \cdot a}^{n-m}}{\underbrace{\cancel{a} \cdot \ldots \cdot \cancel{a}}_{m}} = \overbrace{a \cdot \ldots \cdot a}^{n-m} = a^{n-m}$$

La oss nå anta at $n = m$ og $a \neq 0$. Da får vi at $n - m = 0$, så:

$$\frac{a^n}{a^m} = \frac{a^n}{a^n} = \frac{\cancel{a^n}}{\cancel{a^n}} = 1 = a^0 = a^{n-m}$$

siden vi allerede har sett at $a^0 = 1$ for alle $a \in \mathbb{R} \setminus 0$. Så regelen holder også når $n = m$.

For det tredje tilfelle antar vi at $n < m$. Vi vil fortsatt at regelen vår skal holde, slik at selv om $n - m < 0$, så skal $\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$. Dette vil føre til en definisjon av potenser med negative eksponenter, som vi nå skal se. Vi får at

$$a^{n-m} = \frac{a^n}{a^m} = \frac{\overbrace{a \cdot \ldots \cdot a}^{n}}{\underbrace{a \cdot \ldots \cdot a}_{m}} = \frac{\overbrace{\cancel{a} \cdot \ldots \cdot \cancel{a}}^{n}}{\underbrace{\cancel{a} \cdot \ldots \cdot \cancel{a}}_{n} \cdot \underbrace{a \cdot \ldots \cdot a}_{m-n}} = \frac{1}{\underbrace{a \cdot \ldots \cdot a}_{m-n}} = \frac{1}{a^{m-n}}.$$

Legg merke til at $-(m-n) = -m+n = n-m$, slik at for at regelen $\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$ skal holde også nå, så må vi definere $\frac{1}{a^n} = a^{-n}$. Altså er

$$\frac{1}{a^{m-n}} = a^{-(m-n)}.$$

Spesielt kan vi vise at $a^{-1} = \frac{1}{a}$ $(= \frac{1}{a^1})$:

$$a^{-1} = a^{0-1} = \frac{a^0}{a^1} = \frac{1}{a}$$

Å opphøye en potens

På samme måte som for $a^n a^m$, kan vi vise potensregelen $(a^n)^m = a^{n \cdot m}$

$$(a^n)^m = \underbrace{a^n \cdot \ldots \cdot a^n}_{m} = \underbrace{(\overbrace{a \cdot \ldots \cdot a}^{n}) \cdot \ldots \cdot (\overbrace{a \cdot \ldots \cdot a}^{n})}_{m} = \overbrace{a \cdot \ldots \cdot a}^{n \cdot m} = a^{n \cdot m}$$

Brøkeksponenter

Vi ønsker nå å utvide potensegrepet til å også inkludere eksponenter som er brøker. Vi vil altså kunne betrakte $a^{\frac{m}{n}}$.
Siden vi allerede har sett at

$$a^{\frac{m}{n}} = a^{\frac{1}{n}\cdot m} = (a^{\frac{1}{n}})^m$$

holder det å undersøke $a^{\frac{1}{n}}$. Vi lar $a^{\frac{1}{n}} = x$, og ser da på ligningen:

$$\begin{aligned} a^{\frac{1}{n}} &= x \\ (a^{\frac{1}{n}})^n &= x^n \\ a &= x^n. \end{aligned}$$

Dermed ser vi at $a^{\frac{1}{n}}$ vil være det tallet som opphøyd i n blir a, altså det vi kaller n-te-roten av a. Dette kan også skrives som

$$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}.$$

Spesielt ser vi at $a^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a}$.

Nå kan vi utvide til det generelle tilfellet $a^{\frac{m}{n}}$. Som vi så over er

$$a^{\frac{m}{n}} = (a^{\frac{1}{n}})^m = (\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a}^m.$$

Men vi har også:

$$a^{\frac{m}{n}} = (a^m)^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a^m},$$

så $\sqrt[n]{a}^m = \sqrt[n]{a^m}$. Vi bruker som regel notasjonen

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}.$$

Null opphøyd i null

Vi har nå sett at om $a \neq 0$, så er $a^0 = 1$. Det er nå naturlig å spørre seg om hva som skjer når $a = 0$.

Det gir ingen mening å snakke om 0^0, på samme måte som det ikke gir mening å snakke om $\frac{0}{0}$. Dette kan vi se av ligningen:

$$0^0 = 0^{n-n} = \frac{0^n}{0^n} = \frac{0}{0}$$

Snakker man derimot om *grenseverdier*, kan man tillegge 0^0 en bestemt tallverdi. La oss se på noen ulike eksempler:

(1) $f(x) = 0^x$ er null for alle positive verdier av x , så når x går mot null fra positiv side av tallinja, får vi $\lim_{x\to 0^+} 0^x = 0$. For negative verdier av x, $x = -a$ der $a > 0$, får vi $f(x) = 0^{-a} = \frac{1}{0^a} = \frac{1}{0}$, som ikke er definert.

(2) $g(x) = x^0$ er én for alle verdier av x ulik null, så $\lim_{x\to 0} x^0 = 1$.

(3) $h(x, y) = x^y$ vil altså ha ulik grenseverdi i punktet $(0, 0)$ avhengig av hvilken vei vi følger: $\lim_{y\to 0^+} h(0, y)$, $\lim_{x\to 0} h(x, 0)$. Vi kan konkludere med at $h(x, y) = x^y$ ikke er kontinuerlig i punktet $(0, 0)$.

Man kan finne eksempler der 0^0 "må" være lik én, men også eksempler der antagelsen $0^0 = 1$ fører til en selvmotsigelse. Det gir altså ingen mening å gi 0^0 en bestemt tallverdi, og vi sier den er udefinert.

7. **Rasjonale og irrasjonale tall**

Som vi alt har sett kan vi dele tallene vi kjenner til inn i flere ulike mengder. Vi skal nå se litt nærmere på to av disse mengdene, nemlig de rasjonale og de irrasjonale tallene.

Alle de reelle tallene som kan skrives som en brøk der både teller og nevner er heltall, og nevner er ulik 0, er mengden som kalles de rasjonale tallene, og som betegnes med symbolet $\mathbb{Q}$. De reelle tallene som ikke kan skrives som en brøk av to heltall, utgjør mengden som kalles de irrasjonale tallene.
Det er ikke helt trivielt å se at ikke alle de reelle tallene kan skrives som en brøk, og et var det stort gjennombrudd for grekerne i den Pythagoreiske skolen at det fantes reelle tall som ikke kunne skrives som en brøk av to heltall. Eksempler på irrasjonale tall er $\sqrt{2}$ og π. Vi viser her beviset for at $\sqrt{2}$ er irrasjonalt.

For å vise at $\sqrt{2}$ er irrasjonalt, starter vi med å anta det motsatte. Dette er en vanlig metode for å bevise noe i matematikken, men den kan være uvant og vanskelig for elevene. Hvis vi antar at $\sqrt{2}$ er rasjonalt og kommer fram til en selvmotsigelse, må antagelsen vår nødvendigvis være gal.

I beviset brukes ekvivalensen a^2 *er et partall* $\iff$ a *er et partall*. Dette er ikke nødvendigvis åpenbart, så vi viser det først:
Et partall a kan skrives på formen $a = 2k$, $k \in \mathbb{Z}$. Da får vi

$$a^2 = (2k)^2 = 4k^2 = 2k', k' \in \mathbb{Z},$$

så a^2 er et partall. Et oddetall b kan det skrives på formen $b = 2k + 1$, $k \in \mathbb{Z}$. Da får vi

$$b^2 = (2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1 = 2k' + 1, k' \in \mathbb{Z},$$

så b^2 er et oddetall. Vi har altså at et partall kvadrert er et partall, og et oddetall kvadrert er et oddetall. Da må det motsatte også holde; dersom a^2 er et partall må også a være et partall. Hvis a var et oddetall i dette tilfellet, ville vi fått et oddetall hvis vi kvadrerte a igjen, som gir oss en selvmotsigelse. Vi konkluderer altså at a er et partall hvis a^2 er et partall.

Vi starter beviset for at $\sqrt{2}$ er irrasjonalt med å anta at $\sqrt{2}$ kan skrives som en brøk $\frac{a}{b}$, der a og b er heltall. Vi kan videre anta at brøken er forkortet, slik at a og b er relativt primiske. Vi kan konkludere at enten a eller b må være et oddetall, siden en fellesfaktor 2 ellers ville blitt forkortet bort. Dette gir oss:

$$\sqrt{2} = \frac{a}{b}$$
$$\implies 2 = \frac{a^2}{b^2}$$
$$2b^2 = a^2$$
$$\implies a^2 \text{ er et partall } \implies a \text{ er et partall}$$

Dette betyr at vi kan skrive

$$a = 2k,$$

som gir

$$2b^2 = a^2 = (2k)^2 = 4k^2$$
$$\implies b^2 = 2k^2$$

Dette betyr at b^2 er et partall, men da er også b et partall.
Altså må både a og b være partall, men dette er en selvmotsigelse. Dermed er antakelsen vår om at $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$ for heltall a og b feil, og $\sqrt{2}$ må være irrasjonalt.

Men hvordan kan vi avgjøre om et tall er rasjonalt, eller om det er irrasjonalt? Vi skal nå se at et reelt tall er et rasjonalt tall hvis og bare hvis det enten har endelig eller periodisk desimalutvikling. Det vil si at det enten har endelig mange desimaler eller at vi finner et mønster i desimalene som gjentar seg. Et tall er dermed irrasjonalt dersom det har uendelig mange desimaler som ikke gjentar seg i noe fast mønster.

Bevis:
$\Leftarrow$:
Vi ser først på tall med endelig desimalutvikling, så anta at

$$x = a, a_1 a_2 ... a_n.$$

Vi vil vise at vi kan skrive $x = \frac{a}{b}$ der a og b er heltall.
Men det er lett å se at vi da har

$$x = \frac{a a_1 a_2 ... a_n}{10^n}$$

som er en brøk av heltall. Altså er alle tall med endelig desimal utvikling rasjonale tall.
La oss så anta at x er et periodisk desimaltall,

$$x = a, \overline{a_1 ... a_n}$$

(som over symboliserer streken at desimalene gjentas i det uendelige). Vi ser på x som en geometrisk rekke:

$$a,\overline{a_1...a_n} = a + a_1...a_n \cdot 10^{-n} + a_1a_2...a_n \cdot 10^{-2n} + a_1a_2...a_n \cdot 10^{-3n} + ...$$

$$= a + a_1...a_n \cdot (10^{-n} + 10^{-2n} + 10^{-3n} + ...)$$

$$= a + \frac{a_1...a_n}{10^n} \cdot (1 + \frac{1}{10^n} + \frac{1}{(10^n)^2} + \frac{1}{(10^n)^3} + ...) = a + \frac{a_1...a_n}{10^n} \cdot (\sum_{k=0}^{\infty} 10^{-nk})$$

Siden $|10^{-nk}| < 1$ har vi da:

$$= a + \frac{a_1...a_n}{10^n} \cdot (\frac{1}{1 - 10^{-n}}) = a + \frac{a_1...a_n}{10^n - 1}$$

Her er det klart at både $a_1...a_n$ og $10^n - 1$ er heltall og summen av to rajonale tall er rasjonalt, så x er rasjonalt.

$\Rightarrow$:

La oss nå anta at x er et rasjonalt tall. Det vil si at vi kan sette $x = \frac{a}{b}$ for heltall a og b. Vi vil vise at da har x enten endelig eller periodisk desimalutvikling. Av divisjonsalgoritmen ser vi at x har endelig desimalutvikling dersom resten noen gang blir null. Vi ser på et eksempel: Anta $x = \frac{1}{4}$. Vi setter det opp og bruker divisjonsalgoritmen:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & 1 & : & 4 & = & 0,25 \\
- & 0 & & & & \\
\hline
 & 1 & 0 & & & \\
- & & 8 & & & \\
\hline
 & & 2 & 0 & & \\
- & & 2 & 0 & & \\
\hline
 & & & 0 & &
\end{array}$$

Det er dermed klart at hvis x er et rasjonalt tall så kan det ha endelig desimalutvikling.

Nå gjenstår det bare å vise at dersom det rasjonale tallet $x = \frac{a}{b}$ ikke har endelig desimalutvikling, så er det et periodisk desimaltall. At x ikke har endelig mange desimaler vil si at resten aldri blir 0 når vi deler a på b. Når vi deler a på b ser vi at resten hver gang må bli mindre enn b. Det betyr at dersom resten ikke er 0, så finnes bare $b - 1$ muligheter for hva resten kan være. Dette betyr at vi etterhvert må få den samme resten igjen (det er rett og slett ikke flere å velge mellom). Og når vi får den samme resten som vi har hatt en gang før, vil ting gjenta seg. Vi ser på et eksempel:

Vi ønsker å se på det rasjonale tallet $\frac{1}{7}$ som desimaltall ved hjelp av divisjonsalgoritmen. Vi merker oss, før vi starter divisjonen, at de eneste restene vi kan få som ikke er 0, er 1, 2, 3, 4, 5 og 6. Så vi bør kunne forvente oss at dersom divisjonen $\frac{1}{7}$ ikke går opp, så har desimaltallet brøken tilsvarer en periode med maksimalt $7 - 1 = 6$ ulike siffer. Vi gjennomfører divisjonen:

$$
\begin{array}{cccccccccccl}
 & 1 & :7 & = & 0,1 & 4 & 2 & 8 & 5 & 7 & 1\;\;4 & \\
- & 0 & & & & & & & & & & \\
\cline{2-3}
 & 1 & 0 & & & & & & & & & \text{rest } 1 \\
- & & 7 & & & & & & & & & \\
\cline{2-4}
 & & 3 & 0 & & & & & & & & \text{rest } 3 \\
 & - & 2 & 8 & & & & & & & & \\
\cline{3-5}
 & & & 2 & 0 & & & & & & & \text{rest } 2 \\
 & & - & 1 & 4 & & & & & & & \\
\cline{4-6}
 & & & & 6 & 0 & & & & & & \text{rest } 6 \\
 & & & - & 5 & 6 & & & & & & \\
\cline{5-7}
 & & & & & 4 & 0 & & & & & \text{rest } 4 \\
 & & & & - & 3 & 5 & & & & & \\
\cline{6-8}
 & & & & & & 5 & 0 & & & & \text{rest } 5 \\
 & & & & & - & 4 & 9 & & & & \\
\cline{7-9}
 & & & & & & & 1 & 0 & & & \text{rest } 1 \\
 & & & & & & - & & 7 & & & \\
\cline{8-10}
 & & & & & & & & 3 & 0 & & \text{rest } 3 \\
 & & & & & & & - & 2 & 8 & & \\
\cline{9-11}
 & & & & & & & & & \vdots & &
\end{array}
$$

Så vi ser at når vi får resten 1, som vi har hatt tidligere, så får vi igjen resten 3, så vil vi få 2 i rest, og vi har et mønster! Det er lett å se at det må være slik for alle rasjonale tall.
Vi har altså vist at et reelt tall er rasjonalt hvis og bare hvis desimaltallet det tilsvarer har endelig eller periodisk desimalutvikling.

$\blacksquare$

Men er det gitt at de repeterende desimalene kommer rett etter komma, eller kan vi tenke oss at vi først får noen andre desimaler, før mønsteret begynner?

Kanskje var $\frac{1}{7}$ et prakteksempel. Perioden er så lang den kan være (6 ulike desimaler), og mønsteret begynner rett etter komma. Vi så at

$$\frac{1}{7} = 0,\overline{142857}.$$

Men vi kan helt klart finne eksempler på rasjonale tall der perioden er kortere enn $b-1$ og hvor vi har noen "løse" desimaler før mønsteret begynner. Disse tallene kalles forsinketperiodiske tall.
Vi ser på tall der telleren har flere siffer enn ett. Som et eksempel vil vi betrakte det rasjonale tallet $\frac{343}{300}$. Regner vi ut dette ved hjelp av en kalkulator ser vi at

$$\frac{343}{300} = 1,14\bar{3},$$

så desimalen som gjentar seg er 3, men før mønsteret begynner dukker desimalene 1 og 4 opp. Vi kan få et bilde av hva som skjer ved å utføre divisjonen 343 : 300 ved hjelp av divisjonsalgoritmen:

$$\begin{array}{ccccccccll}
 & 3 & 4 & 3 & :3 & 0 & 0 & = & 1,\ 1\ 4\ 3\ 3 & \\
- & 3 & 0 & 0 & & & & & & \\
\cline{2-4}
 & & 4 & 3 & 0 & & & & & \text{rest } 43 \\
 & - & 3 & 0 & 0 & & & & & \\
\cline{3-5}
 & & 1 & 3 & 0 & 0 & & & & \text{rest } 130 \\
 & - & 1 & 2 & 0 & 0 & & & & \\
\cline{3-6}
 & & & 1 & 0 & 0 & 0 & & & \text{rest } 100 \\
 & & - & & 9 & 0 & 0 & & & \\
\cline{4-7}
 & & & & 1 & 0 & 0 & 0 & & \text{rest } 100 \\
 & & & - & & 9 & 0 & 0 & & \\
\cline{5-8}
 & & & & & \vdots & & & &
\end{array}$$

Vi kan nå se at grunnen til at perioden er forsinket er at vi ikke begynner å trekke ned nulltall med en gang. Den første resten blir 43 fordi vi allerede har 43 mer enn 300 i telleren. Etterhvert som vi begynner å trekke ned nulltall, kommer mønsteret. Dette er grunnen til at noen rasjonale tall er forsinket periodiske tall. Men dersom tallet etterhvert er periodisk, vil det alltid være et rasjonalt tall.

8. **Tellbarhet og mål 0**

Vi har nå snakket om de ulike mengdene vi deler de reelle tallene inn i, og det finnes selvfølgelig også ulike egenskaper slike mengder kan ha. Vi skal nå såvidt se på to slike egenskaper; tellbarhet og mål 0.

Tellbarhet

Vi vil definere hva det vil si at en mengde er tellbar. La A være en delmengde av de reelle tallene, dvs. $A \subset \mathbb{R}$. Vi sier at A er tellbar dersom vi kan skrive

$$A = \{a_n\}_{n \in \mathbb{N}},$$

der vi husker at $\mathbb{N}$ betegner de naturlige tallene ($\mathbb{N} = \{1, 2, 3, ...\}$).

Det vil si at elementene i mengden kan listes. Det er da klart at enhver mengde med endelig mange elementer er tellbar. Men en mengde trenger ikke å være endelig for å være tellbar. Vi skal se at de reelle tallene ikke er tellbare, men at de rasjonale, selv om de ikke er endelig mange, er det.
Først vil vi altså vise at mengden av alle reelle tall ($\mathbb{R}$) ikke er tellbar. Vi viser dette med et motsigelsesbevis:

Betrakt det lukkede intervallet $[0, 1] \subset \mathbb{R}$ og anta at vi kan gi de reelle tallene i intervallet hver sin indeks. Med andre ord vil vi anta at

$$\begin{aligned} x_1 &= 0, x_{11}x_{12}x_{13}... \\ x_2 &= 0, x_{21}x_{22}x_{23}... \\ x_3 &= 0, x_{31}x_{32}x_{33}... \\ &\vdots \end{aligned}$$

der hver x_{ij} er 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 eller 9.

Men nå kan vi lage $y = 0, y_1y_2y_3...$ der $y_i \neq x_{ii}$. For å være sikre på at ikke det nye tallet vårt y er en "klone" av et av tallene x_i (husk at $0, 3\bar{9} = 0, 4$ f.eks.), velger vi også y_i ulik 0 og 9 (vi kan helt klart finne et slikt tall siden y_i da kan ha minst 7 ulike verdier som ikke er den samme som x_{ii}, 0 eller 9). Så y er ikke i listen vi lagde, for for hver x_i er jo $y_i \neq x_{ii}$, så $y \neq x_i$. Men det er jo helt klart at $y \in [0, 1]$. Dermed kan ikke de reelle tallene mellom 0 og 1 være tellbare, så da er heller ikke hele $\mathbb{R}$ tellbar (siden $[0, 1]$ bare en en liten delmengde av hele $\mathbb{R}$).

Men mengden av alle rasjonale tall er tellbar! Med andre ord mener vi at vi kan tilegne hvert rasjonale tall "en plass" i rekken av alle rasjonale tall. Det er flere måter man kan gjøre dette på, men vi skal se på en:

Vi lar det første tallet i rekken være 0. Deretter følger brøker der summen av teller og nevner er ± 1, så brøkene der summen er $\pm 2, \pm 3$ og så videre.
Dette gir oss listen

$$\mathbb{Q} = \{0, \pm\frac{1}{1}, \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{2}{1}, \pm\frac{1}{3}, \pm\frac{3}{1}, \pm\frac{1}{4}, \pm\frac{4}{1}, \pm\frac{2}{3}, \pm\frac{3}{2}, ...\}.$$

Listen viser at vi kan liste opp de rasjonale tallenen i en slik rekkefølge at hvert kan få "sitt nummer" i rekken. Vi kan for eksempel ikke konstruere noe annet rasjonalt tall som har sum av teller og nevner lik 5 enn $\pm\frac{1}{4}, \pm\frac{4}{1}, \pm\frac{2}{3}$ og $\pm\frac{3}{2}$, slik vi kunne konstruere et nytt reelt tall som ikke var i listen da vi antok at vi hadde laget en nummerert liste av de reelle tallene.
Vi ser altså at de rasjonale tallene er tellbare. Det er likevel viktig å merke seg at dette IKKE betyr at det er endelig mange rasjonale tall.

Mål 0

Den andre egenskapen til mengder av tall som vi vil se litt nærmere på, er det som kalles mål 0.
La $A \subset \mathbb{R}$ være en delmengde av de reelle tallene. Vi sier at A har mål 0 dersom det for enhver $\epsilon > 0$ (altså et hvert tall, uansett hvor lite, bare det er større enn null) finnes en følge av intervaller i $\mathbb{R}$, $\{I_n\}$, slik at følgende er oppfylt:

$$(\mathrm{I}) A \subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{N}} I_n$$

$$(\mathrm{II}) \sum_{n=1}^{\infty} |I_n| < \epsilon$$

Med andre ord vil vi at unionen av alle disse intervallene skal inneholde eller være lik hele mengden A. Videre vil vi at gitt et lite tall ϵ, så skal vi kunne velge intervallene slik at summen av lengdene av dem er mindre enn denne ϵ.

Ut i fra denne definisjonen kan vi vise at alle tellbare mengder har mål 0. Det krever litt beregninger for å vise at dette faktisk stemmer. Vi gir et kort bevis:

La A være en tellbar mengde, det vil si at vi kan skrive $A = \{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$. Vi lager oss intervallene

$$I_n = (a_n - \frac{\epsilon}{2^{n+2}}, a_n + \frac{\epsilon}{2^{n+2}}).$$

Vi ser at vi da nødvendigvis har at (I) er oppfylt, $A \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} I_n$. Litt beregninger viser også at

$$\sum_{n=1}^{\infty} |I_n| = \sum_{n=1}^{\infty} |a_n + \frac{\epsilon}{2^{n+2}} - (a_n - \frac{\epsilon}{2^{n+2}})| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\epsilon}{2^{(n+2)}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cancel{2}\epsilon}{2^{(n+1)} \cdot \cancel{2}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\epsilon}{2^{n+1}}$$

$$= \frac{\epsilon}{2} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} (\frac{1}{2})^n = \frac{\epsilon}{2} \cdot (\sum_{n=0}^{\infty} (\frac{1}{2})^n - (\frac{1}{2})^0)$$

Vi gjenkjenner summetegnet her som en geometrisk rekke, så vi får:

$$= \frac{\epsilon}{2} \cdot (\frac{1}{1-\frac{1}{2}} - 1) = \frac{\epsilon}{2} \cdot (2-1) = \frac{\epsilon}{2} < \epsilon.$$

Så også betingelse (II) er oppfylt.

Siden A var en helt generell tellbar mengde, er det klart at enhver tellbar mengde har mål 0.

Vi har jo sett at de rasjonale tallene er tellbare, så mengden av dem har mål 0. De irrasjonale tallene har derimot ikke mål 0. Dette sier noe om hvor mange flere irrasjonale enn rasjonale tall som finnes. Selv om det finnes uendelig mange rasjonale tall, er de irrasjonale mye mer vanlige. Om du skulle trekke et reelt tall ut av en hatt, ville du faktisk med 100% sannsynlighet ha trukket ut et irrasjonalt! Vi kan se på det som at de rasjonale tallene er som små øyer i at hav av irrasjonalitet.

En enda sterkere egenskap en mengde kan ha kalles innhold 0. Det kan være kjekt å kjenne til definisjonen:

En delmengde $A \subseteq \mathbb{R}$ har innhold 0 dersom det for enhver $\epsilon > 0$ finnes en ENDELIG overdekning $I_1, I_2, ..., I_n$ av intervaller av A slik at

$$\sum_{i=1}^{n} |I_i| < \epsilon.$$

Vi ser at det ikke holder at en mengde er tellbar for at den skal ha innhold 0. I tilfellet over kunne vi trenge uendelig mange intervaller for at unionen av dem skulle være inneholdt i eller være hele mengden. Skal vi f.eks. dekke de rasjonale tallene med intervallene I_n, vil vi trenge uendelig mange av dem. De rasjonale tallene har dermed IKKE innhold 0. Derimot vil enhver endelig delmengde av $\mathbb{R}$ ha innhold 0.

Det er viktig å merke seg at

$$A \subset \mathbb{R} \text{ tellbar} \implies A \text{ har mål } 0$$

og

$$A \subset \mathbb{R} \text{ endelig} \implies A \text{ har innhold } 0,$$

men at en mengde kan ha mål 0, eller innhold 0, uten å være tellbar, eller endelig.

9. **Avslutning**

Vi har nå sett på noen av de områdene innenfor matematikken hvor det kan være lett å "bare huske reglene" - regler som kanskje kan være litt vriene å bevise. Vi håper at grunnen til at vi har definert enkelte ting slik vi har, er litt klarere for leseren nå.

Det kan være lurt å legge merke til at vi ofte har "tvunget frem" definisjoner ved å si at vi vil at visse regler skal holde. Spesielt gjelder dette når vi skal utvide vårt begrep om regning fra å gjelde kun positive tall til også å kunne regne med negative tall. Det ville vært helt ulogisk om f.eks. den distributive lov ikke skulle holde, bare fordi vi regner med negative i steden for positive tall!

Det er flere grunner til at det er nyttig å se hvorfor vi har de reglene vi har i matematikken. For de elevene som synes det er vanskelig å huske regler kan det være ekstra nyttig å se hvorfor ting er som de er. Da kan de til og med utlede det selv, om de plutselig er i tvil. Vi mener også at det er mer motiverende å drive med matematikk når man ser at alt har en sammenheng og en "grunn".

Det er ikke positivt for bare elevene å kunne disse bevisene. For å være en god lærer og trives i læreryrket, mener vi at faglig trygghet er en av de viktigste faktorene. Vi håper at denne oppgaven har bidratt til å øke leserens faglige trygghet, og at dette er noe dere får bruk senere.